ШИФР 10-21 (заполняется оргкомитетом)

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

Всероссийская олимпиада школьников по математике
III (региональный) этап
Кировская область, 30 – 31 января 2017 года

Класс 10

Фамилия БУРКОВ

Инициалы И. Л.

(ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ в именительном падеже)

РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма баллов
Результат	7	7	7	1	7	7	7	—	43

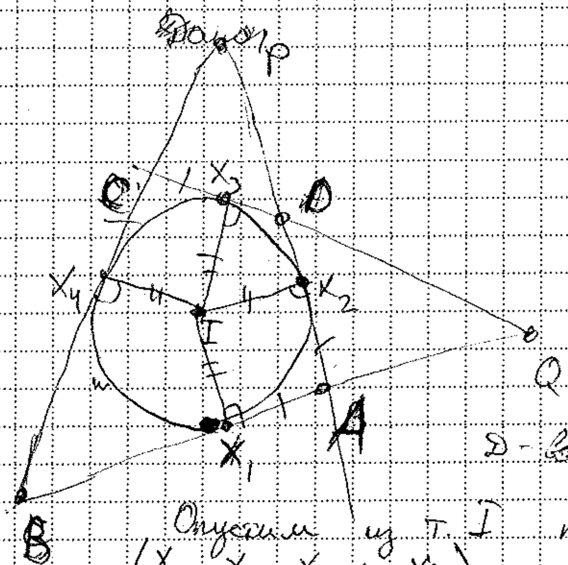
Председатель жюри: ______________ /И.С. Рубанов/

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет	Математика	класс	10	шифр	10-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№2



Дано:

4-$<$ ABCD
~~вписан~~ впис. окр. ц. (I)
пересеч. DA и CB – Q
пересеч. BA и CD – P
I, A, C, P – на одной окр.

Д-ть: I, A, C, Q – на одной окр.

Д-во.

Опускаем из т. I перпендикуляры на стороны (X_1, X_2, X_3 и X_4)

$CX_3 = CX_4$, $AX_2 = X_1A$ (кас. к окр.), $IX_1 = X_2I = IX_3 = IX_4$ (радиус окр.)

$\Downarrow$

$\triangle X_4CI = \triangle X_3IC$, $\triangle IX_1A = \triangle IX_2A$ (по 3 сторонам)

$\Downarrow$

$\angle X_4IC = \angle X_3IC$, $\angle XIA = \angle X_2IA$

Пусть $\angle X_4PX_2 = \alpha \Rightarrow \angle X_4IX_2 = 180 - \alpha$ ($\angle IX_4P = \angle$ ~~IX_2P~~ $= \angle IX_2P = 90°$) $\angle CIA = 180 - \alpha$ (т. C, I, A, P – на одной окр., $\angle CIA$ противоположный к $\angle CPA$)

$\Downarrow$

$\angle CIA = \angle X_4IX_2 \Rightarrow \angle X_4IC = \angle X_2IA = \angle X_3IC = \angle X_1IA$

$\Downarrow$

$\angle X_4IX_3 = \angle X_1IX_2 \Leftrightarrow \angle X_3IX_1 = \angle X_4IX_2 \Leftrightarrow \angle X_3QX_1 = \angle X_4X_2P \Leftrightarrow$ P, Q, A, C – на одной окр.

№1

Да. $x_1 = 1 = x_2 = x_3 = x_4$, $x_5 = 48$

$16 \cdot 3 \cdot 15 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 48 \cdot 15 = 45 \cdot (-2)^4 = 45 \cdot 16 = 3 \cdot 15 \cdot 16$

+

+

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет: математика класс: 10 шифр: 10-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№3

Пусть можно это сделать за k ходов. Тогда в каждой ячейке будет $\frac{\sum_{i=1}^{2017} a_i \cdot k}{2017} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2017} a_i \vdots 2017$, т.к. 2017 - простое

Пусть $\sum a_i = 2017p$. Тогда вычтем из каждого числа a_i p. Заметим, что теперь через k ходов значение в каждой ячейке $=0$

Теперь рассмотрим набор чисел ~~-2016, 1, 1,~~ ~~-42, 1, 1~~ из 42-„1", 1-„-42" и ост. „0", $\Sigma=0$ (т.е. 42 числа „1", 1 число „-42" и остальные „0")

Рассмотрим первый ход. В какую-то ячейку попало число „-42", заметим, что раз максимальное число 1 и в итоге в каждой ячейке должен стоять „0", то в эту ячейку должна минимум 42 раза попасть „1" $\Leftrightarrow$ ходов минимум 43.

~~-42, 1, 1, ..., 1, 0, 0, 0, 0, 0. Давайте выберем 43 ящика, 1 - а в ост. будем каждый ход добавлять 0~~

~~Пусть $a_1 = 1(-42)$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{43} = 44(1)$, $a_{44} = \ldots = a_{2017} = 43(0)$~~

Пример:

$a_1 = 1$, $a_2 = \ldots = a_{43} = 44$, $a_{44} = 43 = a_{45} = \ldots = a_{2017}$

$k=43$

За 1 ход в 1 коробку 1, в коробки с 2 по 43 по 44 камня и каждый ход в коробки с 44 по 2017 по 43 камня.

За 2 ход во 2 коробку 1 камень, в коробки 1, 3, 4, ..., 43 по 44 камня

За 3 ход в 3 коробку 1 камень, в коробки 1, 2, 4, 5, ... 43 по 44 и т.д.

В итоге: в 1, 2, ..., 43 : $1 + 44 \cdot 42 = 43 \cdot 42 + 42 + 1 = 43 \cdot 43$

в ост.: $43 \cdot 43$

Иначе сводим, $44 \cdot 42 + 1 = 43 \cdot 43$ ок

Если можно за $k < 43$, то вычтем из каждого a_i 43

~~Мы получим набор (42 кучки „1", 1 кучка „-42", ост. кучки „0")~~

Тогда из каждой кучки уберем по 43 камня и можем считать, что изначальные кучки были: 42 кучки „1", 1 кучка „-42", ост. кучки „0"

Но по доказанному такого не бывает.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика класс 10 шифр 10-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№4

Докажем что для $k \le 2016$ учитель не сможет составить задачу. Рассмотрим СЛУ: с 2017 переменными и 2016 уравнениями. Где переменные – коэффициенты ур-ния

$a_{2016}\ a_{2015}\ \dots\ a_0$

$$k\begin{cases} a_{2016}\cdot n_1^{2016}+\dots+n_1 a_1+a_0=b_1-n_1^{2017}\\ \qquad =b_2-n_2^{2017}\\ \vdots\\ a_{2016}\cdot n_k^{2016}+\dots+a_0=b_k-n_k^{2017}\end{cases}$$

$P(n_1)\cdot P(n_2)\cdot P(n_3)\cdot\ldots\cdot P(n_k)=b$

$\underbrace{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_k}=b$

а кто такие $b_1\dots b_k$?

разложение не единственно

Т.к. кол-во переменных больше, чем кол-во уравнений и сущ. хотя бы 1 целочисленное решение, то их бесконечно много.

Теперь пусть $k=2017$ и пусть у нас нашлись такие $n_1, n_2, \dots, n_{2017}$, что по $P(n_1)\cdot\ldots\cdot P(n_{2017})=b$ мы можем однозначно определить ур-ние.

Тогда $P(n_1)=k_1$, $P(n_2)=k_2$, $\dots$ $P(n_{2017})=k_{2017}$, $k_1\cdot k_2\cdot\ldots\cdot k_{2017}=b$

Система вообще много!

Пример на 2018

Пусть $b=1$, тогда $k_1, k_2, \dots, k_{2018}\in\{1,-1\}$

Пусть $n_1=0$ тогда $P(0)\cdot P(n_2)\cdot\ldots\cdot P(n_{2018})=a_0 P(n_2)\cdot\ldots\cdot P(n_{2018})$

Докажем по индукции

Пусть $n=2$ $k=2+1$

$a_0(x_1^2+x_1a_1+a_0)(x_2^2+x_2a_1+a_0)=1$ $\quad x_1\ne x_2$

Пусть $a_0=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1^2+x_1a_1+1=x_2^2+x_2a_1+1=\pm1\\ (x_1-x_2)(x_1+x_2+a_1)=0\\ x_1+x_2+a_1=0\end{cases}$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет	математика	класс	10	шифр	10-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№5

Пусть над столбцами k рац. чисел $\Leftrightarrow$ над столбцами $50-k$ иррац. чисел $\Leftrightarrow$ Слева от столбцов $50-k$ рац. чисел и k - иррац. чисел

*Заметим, что произведение иррац. числа с рациональным - число иррациональное. А произведение рац. чисел - число рац. Произведение иррац. чисел бывает как рац, так и иррац.

рац. чисел в клетках $\leq (50-k)k + (50-k)k = 2(50-k)k$

$k^2 - 50k + 25^2$

$\cancel{50k - k^2 \leq 25^2} \Leftrightarrow (k-25)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (50-k)k \leq 25^2$

равенство достиг. $k = 25$

Пример: таблица 50×50 с числами над столбцами: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}, 1, 2, 3, 4, \ldots, 50$ и числами слева от строк: $51\sqrt{2}, 52\sqrt{2}, \ldots, 100\sqrt{2}, 51, \ldots, 100$. Тогда произведение любых двух иррац. чисел $= k_1\sqrt{2} \cdot k_2\sqrt{2} = 2k_1k_2$, где k_1 и $k_2 \in \mathbb{Q}$

Ответ: $2 \cdot 25^2$

?

только пример

50

+/2

Страница 1 из 3

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика класс 10 шифр 10-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№6

Пусть первые $n \geq 2$ чисел $= a_1, a_2, \dots, a_n$

~~Тогда пусть сумма квадратов первых n чисел~~ $\cancel{= S_1 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Тогда пусть сумма квадратов первых n чисел $= S_1 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$

$(a_1, a_2, \dots, a_n)\ S_1$. Тогда $S_1 \geq 2$ имеет хотя бы 1 простой делитель

Рассмотрим следующую минуту $S_2 = S_1^2 + S_1 = S_1(S_1+1)$

Заметим, что ~~делители~~ S_1 и S_1+1 взаимнопросты $\Rightarrow$ число S_2 имеет хотя бы 2 различных простых делителя.

~~Рассмотрим любой момент i. Пусть последнее число, которое мы получили $- S_i$~~

Докажем по индукции, что число полученное на i минуте ~~секунде~~ имеет, как минимум, i ~~про~~ различных простых делителя

База для $i = 1, 2$ доказана.

Переход.

Пусть на $i-1$ секунде мы получили число S_{i-1}, тогда на i секунде мы получили число $S_{i-1} + S_{i-1}^2 = S_{i-1}(S_{i-1}+1)$. Т.к. S_{i-1} и $S_{i-1}+1$ взаимнопросты, ~~то~~ и S_{i-1} имеет хотя бы $i-1$ разл. простой делитель, то S_i имеет хотя бы i разл. простых делителей.

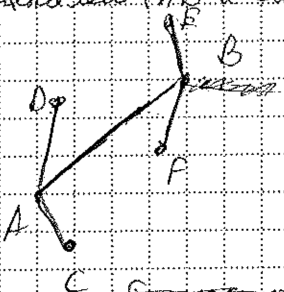
+

Страница 2 из 3

№7

1. По индукции, по кол-ву вершинок, докажем, что найдется 2 Δ образованные 3 идущими подряд вершинками.

Для начала поймем, что если в выпуклом многоугольнике провести диагональ, то он разобьется на 2 выпуклых многоугольника. Для этого рассмотрим стороны, принадлежащие вершинам диагонали (AB и стороны AC, AD, BE и BF), т.к. многоугольник



выпуклый, $\angle BEF$ и $\angle DAC < 180°$. Заметим, что углы ~~...~~ многоугольников $BF \dots CA$ и $AD \dots EB < 180°$, т.к. изначальный многоугольник выпуклый, а $\angle EBA$ и $\angle FBA < \angle EBF$ и $\angle DAB$ и $\angle CAB < \angle DAC \Leftrightarrow$ полученные многоугольники выпуклые.

~~Предположение: Если для n уг. При разбиении n угольника непересек. диагоналями на Δ, то найдутся 3 подряд идущие вершины, обр. Δ.~~

База ~~для n=3~~ и n=4 очевидна.

Предположение: При разбиении $n \geq 4$ угольника непересекающимися диагоналями на Δ, найдутся 2 Δ образованные 3 подряд идущими вершинами, то для n+1 угольника ~~будут~~ они тоже найдутся при аналог. разбиении

Переход: ~~вершины~~

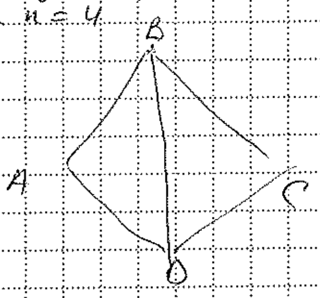
Рассмотрим любую диагональ. Она разбивает многоугольник на 2 выпуклых с меньшим кол-вом вершин. По индукции там нужные ~~будут~~ найдутся и в каждом, один из них (Δ) не принадлежит ~~диагонали~~ диагонали. Если один из многоугольников является Δ, то для другого, Δ ни одна сторона которого ~~...~~ не принадлежит диагонали найдется, а для Δ это он сам и есть.

~~База для n=4, Δ диагональ может разбить на многоуголь-ник+треугольник n<4~~

Теперь по индукции докажем, что если для n угольника, при разбиении его диагоналями на равноб. Δ, найдутся 2 равные стороны, то для n+1 угольника при таком же разбиении они тоже найдутся

База для n=3 очевидна

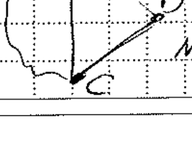
для n=4



Если в $\triangle ABD$ $AB=AD$, то мы победили, иначе пусть $AB=BD$, тогда в BCD ~~либо~~ $BC=CD$, ~~либо~~ или $BC=BD=AB$ или $CD=BD=AB$

Переход.

Найдём диагональ, которая отделяет от многоугольника Δ образованный 3 подряд идущими вершинами. ($\triangle ABC$) По индукции в многоугольнике без вершины B найдутся 2 стороны, которые равны.



Это 2 стороны многоугольника, или одна из его сторон и $AC=NM$ тогда для $\triangle ABC$ или $NM=AC=AB$ или $NM=AC=BC$ или $AB=BC$.