ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	-

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА (заполняется оргкомитетом): 9-37

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ (ДД.ММ.ГГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ: 31.01.2018

ВТОРОЙ ДЕНЬ: 01.02.2018

ФАМИЛИЯ: САВЕЛЬЕВ

ИНИЦИАЛЫ: А. В.

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО): 9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ: 9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается): 11

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ
(заполняется жюри)

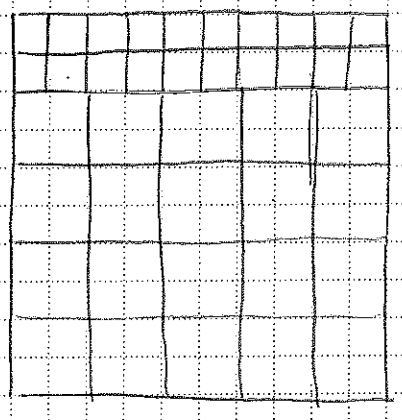
Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	7	–	7	7	7	7	1	57

Председатель жюри: _____ /И.С. Рубанов/

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-37

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

9.1.



Квадрат ~~20~~ 10×10 разбит на 20 квадратов 1×1 и 20 квадратов 2×2.

+

9.2. Решение:

Упорядочим эти числа: $0<a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$

По условию верно:

(1) $a_1+a_3+a_4 \vdots a_5$

(2) $a_2+a_3+a_4 \vdots a_5$

(3) $a_1+a_2+a_4 \vdots a_5$

(4) $a_1+a_2+a_3 \vdots a_5$

+

~~I~~ (2)-(1): $a_2-a_1 \vdots a_5$

I Но $a_2-a_1<a_5$, т.к. $a_2\le a_5$, $a_1>0$.

$a_2-a_1>-a_5$, т.к. $a_1\le a_5$, $a_2>0$.

$\Downarrow$

$a_2-a_1=0 \Rightarrow a_2=a_1$

(2) (3)

Вычтем из (3) выражение (2):

$a_3-a_1 \vdots a_5$. Аналогично (I) рассуждению ~~Аналогично~~: $a_3=a_1$.

Вычтем из (3) выражение (4):

$a_4-a_3 \vdots a_5$, аналогично (I) рассуждению: $a_4=a_3$.

предмет МАТЕМАТИКА | класс 9 | шифр 9-37

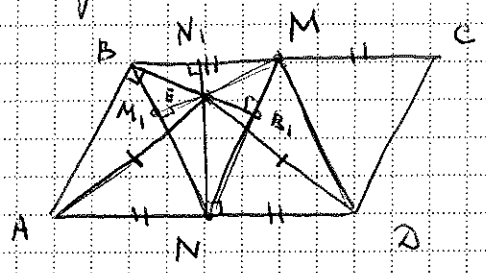
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Получили:

$a_2 = a_1 = a_3 = a_4$

Ответ: да.

9.3.



Дано:
$ABCD$ – параллелограмм.
M – середина BC
N – середина AD.
$EA = ED$
$\angle ABE = 90^\circ$
$ME \cap BN = M_1$
$NE \cap BM = N_1$
$BE \cap MN = B_1$

Найти:
$\angle DME$ – ?

Решение:

1. Т.к. $AE = DE \Rightarrow E$ ∈ сер.пер-ру к отрезку AD. N – середина $AD \Rightarrow$ $\Rightarrow NE$ – сер.пер-р к $AD \Rightarrow \angle ENA = 90^\circ$

2. $BC \parallel AD$, $N_1N \perp AD \Rightarrow N_1N \perp BC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle NN_1B = 90^\circ$

3. $BM = AN$ ($\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$), $BM \parallel AN$
$\Downarrow$
$ABMN$ – параллелограмм
$\Downarrow$
$AB \parallel MN$

4. $BB_1 \perp AB$, $AB \parallel MN \Rightarrow BB_1 \perp MN \Rightarrow \angle BB_1N = 90^\circ$.

5. В $\triangle BMN$:
BB_1 и NN_1 – высоты, которые пересек. в т. E
$\Downarrow$
E – ортоцентр $\triangle BMN$
$\Downarrow$
ME – высота
$\Downarrow$
$MM_1 \perp BN$

6. $BM = ND$ ($\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD$) $\Rightarrow$ $BM \parallel ND$
$\Downarrow$
?

предмет	МАТЕМАТИКА	класс	9	шифр	9-37

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$\parallel$

$BMDN$ - $\parallel$грамм

$\parallel$

$BN \parallel MD$

7. $MM_1 \perp BN$, $BN \parallel MD \Rightarrow MM_1 \perp MD \Rightarrow \angle DME = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

9.4. Ответ: 5501. (В решении „мальчик" = „ученик").

Оценка: По условию, у каждого мальчика количество сортов, которое он не получил, не более 10. ~~Значит во~~ Сделаем граф, в котором вершины - это сорта, а рёбра - проведены, если у ~~какого~~ всех мальчиков конфеты этих сортов обе отсутствуют или обе присутствуют.

Выстроим ~~этих~~ всех мальчиков в очередь и будем наблюдать за графом при добавлении следующего мальчика ко всем предыдущим. (Т.е. изначально смотрим на граф, когда мальчиков нет, а потом ~~к множеству мальчиков добав~~ по очереди будем их добавлять и смотреть как меняется граф при ~~изме~~ добавлении мальчика)

Изначальный граф - полный граф на N вершинах, конечный - N ~~в~~ отдельных вершин.

Посмотрим, что происходит при добавлении очередного мальчика:

$\underbrace{\text{сорта, которые есть у мальчика}}_{N-10+x}$ $\underbrace{\text{сорта, которых у него нет}}_{10-x}$ $(x \in \mathbb{Z},\ x \geq 0)$.

предмет	МАТЕМАТИКА	класс	9	шифр	9-37

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$\underbrace{1^{я}\text{ часть}}_{N-10+x}$ $\underbrace{2^{я}\text{ часть}}_{10-x}$ Заметим, что если вершины какой-то компоненты ~~есть~~ связности есть в обеих частях, то эта компонента делится на 2 ~~части~~ компоненты ~~т.к. у этого мальчика~~ (если 2 ~~конфеты~~ вершины находятся в разных частях, то между ними убирается ребро в графе по определению, которое я задал ребру) V

Также, назовём изначальную компоненту „главной".

Тогда, пусть при добавлении очередного мальчика во 2й части оказалось K компонент.

V (также, если 2 вершины находятся в одной части, то между ними ребро сохраняется) ~~[illegible]~~

Тогда могло добавиться не более K новых компонент, а ~~из главной могли вычесть~~ „главная" компонента могла уменьшиться на не более чем 11-K вершин (т.к. хотя бы (K-1)·1=K-1 вершин из других комп., всего не более 10 вершин во 2й части)

~~Т.е. суммарно вы уменьшили~~

Т.е. сумма уменьшения „главной" компоненты и ~~ув~~ кол-ва новых компонент не более 11.

А всего главная компонента должна уменьшится на N-1 вершину и общее кол-во компонент должно увеличится на N-1, т.е. в сумме 2N-2.

+

Главная полный граф

предмет	МАТЕМАТИКА	класс	9	шифр	9-37

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

А т.к. мальчиков всего 1000, ~~то~~ а за одного мальчика сумма ~~в~~ двух выше описанных чисел ~~рав~~ не больше 11, то:

$$11 \cdot 1000 \geq 2N - 2.$$

$$\Uparrow$$

$$N \leq 5501.$$

Пример: Давайте научимся за 10 ~~ходов~~ мальчиков уменьшать „главную" компоненту на 55 вершин и добавлять 55 новых компонент. Скажем, что в „главной" компоненте 56 вершин ~~по~~ ~~и будем~~, а на остальные не будем обращать внимание (в алгоритме)

0й мальчик ~~56~~ 56 (Г)

1й мальчик (46 (Г) 10 (Г)) 46 (Г) 10 (Г)

(37 (Г) 9 (Г) 1 (Г) 9 (Г)) 2й мальчик ~~(37 (Г) 9 (Г) 1 (Г))~~ 37 (Г) 9 (1) 9 (2) 1 (3) ~~9~~

Выше приведён алгоритм для первых 2 мальчиков (слева в скобочках написано как будут распределятся ~~сор~~ вершины у каждого мальчика, справа — какие будут компоненты после такого распределения конфет, в ○ написан номер компоненты (Г) — „главная") ~~Заметим~~, ~~что пос~~ ~~После n-го мальчика будет~~

Опишем наш алгоритм по индукции: будем добиваться того, чтобы после n-го мальчика было n ~~ком~~ не „главных" компонет, в которых по (11-n) вершин „главная" компонента,

предмет	МАТЕМАТИКА	класс	9	шифр	9-37

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

в которой ~~56 10 ... (11-n)~~ $\frac{(10-n)(11-n)}{2}+1$ вершин, а

также $55-\frac{(11-n)(10+n)}{2}$ компонент с 1 вершиной.

База: выше.

Переход: (n+1 мальчик) $\underbrace{\text{всё остальное}}_{1^{\text{я}}\text{ часть}}$ $\underbrace{\overset{\text{г}}{10-n}\ \overbrace{1\ 1\ 1\ 1\ldots 1}^{n}}_{2^{\text{я}}\text{ часть}}$ они все из n не „главных" компонент с 11-n вершинами.

После такого мальчика получится:

- „главная" компонента с $\frac{(10-n)(11-n)}{2}+1-(10-n)=$
$=\cancel{(10-n)(9-n)}\ \frac{(10-n-1)(11-n-1)}{2}+1.$

- n+1 не „главная" компонента с $10-n$ ~~11~~ $=11-n-1$ вершинами в каждой

- $55-\frac{(11-n)(10+n)}{2}+n=55-\frac{(11-(n+1))(10+(n+1))}{2}=$
$=55-\frac{(10-n)(11+n)}{2}$ ~~вершин~~

компонент с 1 вершиной.

тогда после 10 мальчика будет $10+55-\frac{1\cdot 20}{2}=$
$=55$ компонент с 1 вершиной

и 1 „главная" компонента с 1 вершиной (не „главных").

Так сделаем 100 раз, тогда получится 5500 ~~одно~~ компонент (не „главных") (во все разы будем добавлять все другие вершины из „главной" компоненты в 1 часть), (это никак не повлияет на алгоритм) и одна „главная" с оставшейся вершиной.

9.6. Заметим, что у минимального числа хотя бы

225 цифр, т.к. $9 \cdot 224 = 2016 < 2018$.

Тогда минимальной первой цифрой (у min числа)

может быть только 2 ($1 + 9 \cdot 224 = 2017 < 2018$)

Т.е. min число - $2\underbrace{999\ldots9}_{224}$

Тогда след. число $\geq 3\underbrace{000\ldots0}_{224}$ => его первая цифра

3.

Оставшаяся сумма - 2015, из 224 цифр

её можно набрать только одной „8" и 223 „9"

(потому что если есть 2 „8" или цифра $\leq$ „7" то

2015 уже не набрать, значит 8 могут быть

не более одной „8" а остальные - „9", но

все „9" не подходят)

Тогда след. min число:

$38\underbrace{99\ldots9}_{223}$

След. min после него $\geq 39\underbrace{0\ldots0}_{223}$

А т.к. последние 224 цифры - 1 „8" и 223 „9",

то след. min:

$3989\underbrace{\ldots9}_{222}$, след. min после него $\geq 3990\underbrace{\ldots0}_{222}$

А т.к. последние 224 цифры - 1 „8" и 223 „9",

то след. min:

$39989\underbrace{\ldots9}_{221}$ аналогично получаем след. 221

число. #

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-37

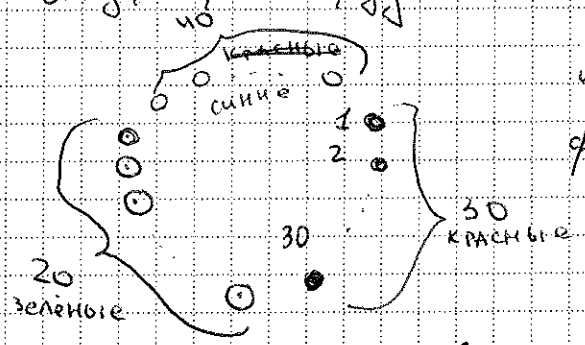
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Тогда последнее число по такому рассуждению: (в которое начин. с „3")

$3\underbrace{999\ldots9}_{223}8$, а оно ~~уже~~ на 225 месте.

Ответ: $3\underbrace{9\ldots9}_{223}8$

9.7. ~~Заметим, что красная фишка не может оказаться между~~ Ответ: нельзя.



Пронумеруем красные фишки от 1 до 30 по часовой стрелке (как на рис. левее)

Заметим, что между i и $i+1$ красной фишкой ($i \in \mathbb{N}$, $i \leq 49$) (от i к $i+1$ по часовой стрелке: i $i+1$ между)

не может встать зелёная фишка (иначе она должна ~~по~~ в какой-то ход поменяться местами с i или $i+1$ (красной фишкой, что запрещено условием), но если можно добиться того, чтобы все соседи были разноцветные, то между i и $i+1$ красной фишкой должна стоять синяя. Таким образом нам необходимо 29 синих фишек. Однако, если провести аналогичные рассуждение для зелёных фишек, то ~~нам~~ нам надо будет ещё 19 синих фишек (очевидно отличных от предыдущих 29). Т. е. всего $29+19=48$ синих фишек, а их 40 ↯.

+

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-37

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

9.8. Пусть есть представление:

$$p+q=n^{k_1}+n^{k_2}+\ldots+n^{k_q} \quad (1)$$

~~Зам~~

$q=\cancel{n^0+n^0}\ 1+1+\ldots+1 \quad (2)$

Вычитая из $(1)^{10}$ $(2)^{\ell}$ получаем:

$p=(n^{k_1}-1)+(n^{k_2}-1)+\ldots+(n^{k_q}-1)=(n-1)(n^{k_1-1}+\ldots+1)+$

$+(n-1)(n^{k_2-1}+\ldots+1)+\ldots+(n-1)(n^{k_q-1}+\ldots+1)=$

$=(n-1)\cdot S$, где S сумма всех скобок вида $(n^{k_i-1}+\ldots+1)$

Во-первых, т.к. $p\neq 0$, то S и $(n-1)\in\mathbb{N}$,

а значит $p \vdots n-1$, а т.к. p - простое, то

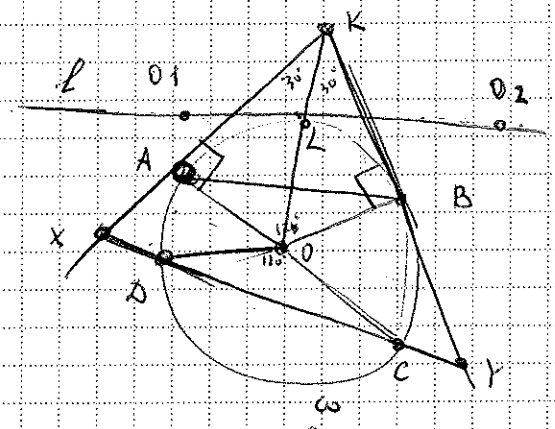
$(n-1)=1$ или $(n-1)=p$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=p+1 \end{array}\right.$

Т.е. хороших чисел не более 2. ЧТД.

9.9.



Дано:
ω - окр.
AB и CD - непересек. хорды.
$\angle AOB=\angle COD=120^\circ$.
KA и KB - кас. к ω
$KA\cap CD=X$ $\quad OK\cap\omega=L$
$KB\cap CD=Y$
O_1 - ц. окр. ODX
O_2 - ц. окр. OCY
Д-ть:
O_1O_2 - касат. к ω.

Доказательство:

1. $\angle OAK=\angle OBK=90^\circ$ (радиус $\perp$ касат.)

$\Downarrow$

$\angle AKB=60^\circ$ ($360^\circ-\angle KAO-\angle KBO-\angle BOA$)

2. $KA=KB$ (отрезки касат.)
$OA=OB$ (радиусы)

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\triangle KAO = \triangle KBO$ (по 2 катетам)

$\Downarrow$

$\angle AKO = \angle BKO = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$;

$\Downarrow$

$OK = 2AO$ (катет против $\angle 30^\circ$ в 2 раза меньше гипотенузы)

3. $\angle ODX = 180^\circ - \angle ODC = 180^\circ - \frac{(180^\circ - \angle DOC)}{2} = 150^\circ$

($\triangle ODC$ р/б $OD = OC$)

$\angle OCY = 180^\circ - \angle OCD = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle DOC}{2} = 150^\circ$

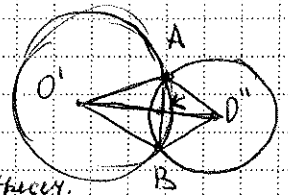
4. $\angle ODX + \angle OKX = 180^\circ \Rightarrow$ K лежит на опис. окр. $\triangle ODX$ } K – точка пересеч. окр. ODX и OCY.

$\angle OCY + \angle OKY = 180^\circ \Rightarrow$ K лежит на опис. окр. $\triangle OCY$ }

5. O лежит на опис. окр. $\triangle ODX$ и $\triangle OCY \Rightarrow$

$\Rightarrow$ O – точка пересечения окр. ODX и OCY

6. Докажем, что линия центров двух окруж. явл. сер. пер-ром к отрезку с концами в т. пересечения окр.:



A и B – т. пересеч.
O' и O'' – центры
$O'O'' \cap AB = K$.

1) $O'A = O'B$ (радиусы)
2) $O''A = O''B$ (радиусы)
3) $O'O''$ – общая

$\Downarrow$

$\triangle O'AO'' = \triangle O'BO''$

$\Downarrow$

$\angle AO'O'' = \angle BO'O''$

В $\triangle O'AB$ $O'K$ – бис., а т.к. $\triangle O'AB$ – р/б ($O'A = O'B$), то $O'K$ – высота и медиана $\Rightarrow O'O''$ – серпер к AB.

7. Т.к. $OK = 2AO$ (п.2)

$OA = OL$ (радиусы), то $OK = 2OL \Rightarrow$ L – середина $OK \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1O_2$ проходит через L (п.6) и $O_1O_2 \perp OL$ (п.6) $\Rightarrow$

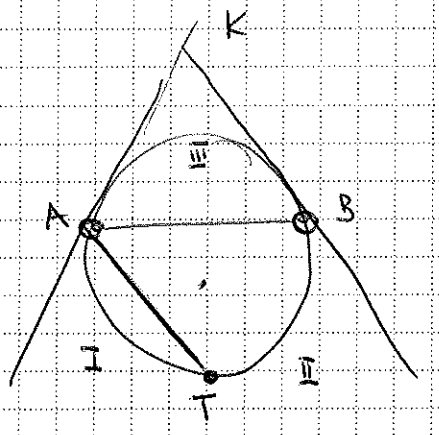
$\Rightarrow O_1O_2$ – касат. (в т. пересеч. радиус $\perp$ ~~касат~~ линии $\Rightarrow$ линия явл. касат.)

ЧТД.

предмет МАТЕМАТИКА | класс 9 | шифр 9-37

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

9.9. Докажем, что расположение точек A, B, C, D такое, как на рис.:



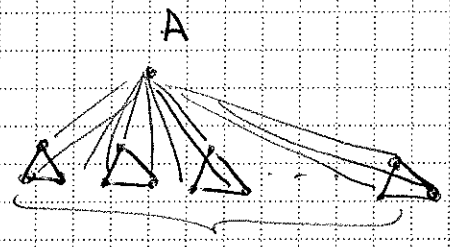
Заметим, что т.к. хорды не пересек., то ни C, ни D не лежат на III дуге ⇒ одна т. лежит на I дуге, а вторая – на II (т.к. и I и II дуги по 120°, а т. A и B выкопоты)

Заметим, что 2 дуга ближе к KB, чем I (т.к. AT ∥ KB) (не точки ближе, а дуги ближе)

Я значит, если на II дуге лежит D, а на I – C, то луч DC не пересечёт KB ч.т.д.

9.10. Ответ: 198

Пример:



Если убираем мальчика A, то у разделяем по 3, как на рис.

Если убираем мальчика из трибуны, то ставим вместо него A.

+7