ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	-

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА (заполняется оргкомитетом): 10-01

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ (ДД.ММ.ГГГГ.)
ПЕРВЫЙ ДЕНЬ: 01.02.2019
ВТОРОЙ ДЕНЬ: 02.02.2019

ФАМИЛИЯ: Головина

ИНИЦИАЛЫ: К. D.

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО): 10

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ: 10

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается): 7

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	–	–	7	7	7	–	2	44

Председатель жюри: _____ /И.С. Рубанов/

⑥ Любые три подряд идущих числа дают сумму, кратную 3 (т.к. среди них по одному числу с каждым остатком при делении на 3, $0+1+2=3 \equiv_3 0$. Значит, сумма кратна 3).

В зависимости от того, какую четность имеет первое из четырех чисел, нужно взять либо 1, 2 и 3 числа, если первое $\equiv_2 1$, либо 2, 3 и 4, если первое $\equiv_2 0$.

В первом случае остатки при делении на 2: 1, 0, 1, 0. Если взять 1, 2, 3, то сумма $1+0+1 \vdots 2$. Во втором случае, остатки 0, 1, 0, 1. Сумма $1+0+1 \vdots 2$.

Мы взяли 3 числа, сумма которых $\vdots 2$ и $\vdots 3$ (т.к. подряд идущие). $S = 2\cdot 3\cdot X$. Т.к. каждое из чисел >100, то $S > 300$, $X > 50$. Ни 2, ни 3, ни 1 не могут быть X. Значит X равен другому, ранее не использованному натуральному числу. Значит, S представимо в виде произведения 3-х различных чисел $\neq 1$.

7 $X_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right)$

$$X_{i+1} = 2^{i+1}\left(b^{\frac{1}{2^{i+1}}} - a^{\frac{1}{2^{i+1}}}\right)$$

$$\left(b^{\frac{1}{2^{i+1}}} - a^{\frac{1}{2^{i+1}}}\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{2^{i+1}}} + a^{\frac{1}{2^{i+1}}}\right) = b^{\frac{1}{2^i}} - a^{\frac{1}{2^i}}$$

$$b^{\frac{1}{2^{i+1}}} - a^{\frac{1}{2^{i+1}}} = \frac{b^{\frac{1}{2^i}} - a^{\frac{1}{2^i}}}{b^{\frac{1}{2^{i+1}}} + a^{\frac{1}{2^{i+1}}}}$$

$$X_{i+1} = 2\cdot 2^i\cdot\frac{b^{\frac{1}{2^i}} - a^{\frac{1}{2^i}}}{b^{\frac{1}{2^{i+1}}} + a^{\frac{1}{2^{i+1}}}} =$$

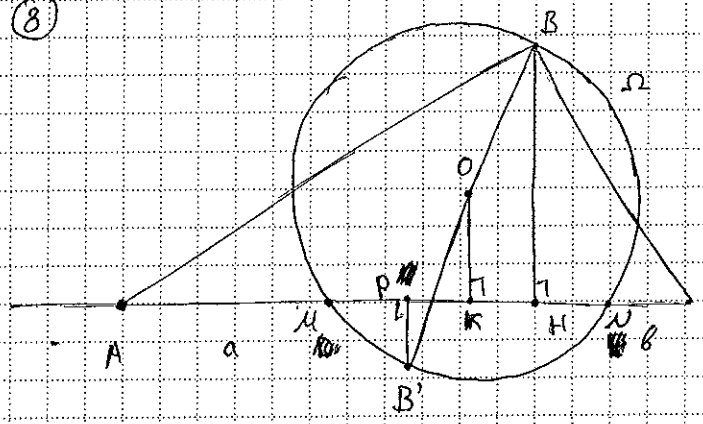
$$= X_i\cdot\frac{2}{b^{\frac{1}{2^{i+1}}} + a^{\frac{1}{2^{i+1}}}}$$

Т.к. по условию $b > 1$, $a > 1$, то ~~очевидно, что~~ и $b^{\frac{1}{2^{i+1}}} > 1$ и $a^{\frac{1}{2^{i+1}}} > 1$ (т.к. $b > 0$, то $b^{\frac{1}{2^{i+1}}} > 0$, если $0 < b^{\frac{1}{2^{i+1}}} < 1$, то при возведении в степень $\frac{1}{2^{i+1}}$ получается число от 0 до 1 $\Rightarrow 0 < b < 1$, что неверно)

Значит сумма $b^{\frac{1}{2^{i+1}}} + a^{\frac{1}{2^{i+1}}} > 2$.

Тогда $X_{i+1} < X_i$, т.к. $\frac{2}{b^{\frac{1}{2^{i+1}}} + a^{\frac{1}{2^{i+1}}}} < 1$.

(8)



+

O – центр окружности Ω

$OK \perp AC$

$B'P \perp AC$

с $AM = a = MKH$

$NC = b = HN$

Т.к O равноудалена от M и N, то $MK = KN$. Следовательно, т.к $MH = a$, $HN = b$, то $KH = \frac{|a-b|}{2}$

$MK = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

$KN = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$

BB' – диаметр $\Rightarrow BO = B'O$, значит их проекции на AC также равны. $PK = KH = \frac{a-b}{2}$ $PH = a-b$

Тогда $AP = 2a - (a-b) = a+b$

$PC = 2b + (a-b) = a+b$ $\Rightarrow AP = PC$

В $\triangle AB'C$ $B'P$ – высота и медиана $\Rightarrow \triangle AB'C$ – равноб.

Значит, $AB' = B'C$, что и требовалось доказать.

(10) Последовательность задается следующим образом:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + a_1 \\ a_3 = a_2 + a_1 \\ a_4 = a_3 + a_1 \end{cases} \quad 3$$

$$5 \quad a_5 = a_4 + a_2$$

$$\dots$$

$$2k+1 \begin{cases} a_{k^2+1} = a_{k^2} + a_k \\ a_{k^2+2} = a_{k^2+1} + a_k \\ \dots \\ a_{(k+1)^2} = a_{(k+1)^2-1} + a_k \end{cases}$$

$$\dots$$

Множество делится на „блоки", каждое число которого отличается от предыдущего на a_k. Количество чисел в блоке $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$.

Как известно, среди p чисел, каждое из которых отличается от предыдущего на m, взаимнопростое с p, найдется число, кратное p.

Рассмотрим блок от a_{k^2+1} до $a_{(k+1)^2}$, каждый член отличается на a_k. При a_k взаимно простым с n среди $2k+1$ числа обязательно найдется число, делящееся на n нацело. Чтд.

$\mp$

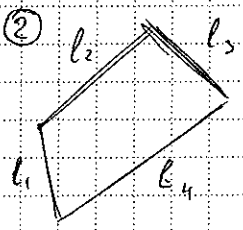
① Ответ: 9.

Предположим, что рыцарей больше 9. Т.е. 10. Один из них тогда должен сказать, что его число <1. При этом, он также должен сказать, что его число больше n. Т.к. $n \in \{1 \dots 10\}$, а фразу говорит рыцарь, всегда должно выполняться что его число ≥ 1 (т.к. $n \geq 1$). Также, т.к. он рыцарь, должно выполняться и его высказывание о том, что его число <1. В итоге, его число одновременно >1 и <1. Что, очевидно, невозможно. Следовательно, рыцарей меньше 10.

+

Пример на 9:

человек:	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л
число:	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	2
1 выск:	>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10
2 выск:	<2	<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1

② 

$l_4 \cdot l_2 \cdot l_3 \vdots l_1$

$\Downarrow$

$P \cdot l_1 \vdots l_1$ $\qquad P = 10^{100}$

$\Downarrow$

$P \vdots l_1$ $\qquad$ По аналогии:

$P \vdots l_2$

$P \vdots l_3$

$P \vdots l_4$

Обозначим, что: $10^{100} = l_1 \cdot k_1$ $\qquad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N}$

$10^{100} = l_2 \cdot k_2$

$10^{100} = l_3 \cdot k_3$

$10^{100} = l_4 \cdot k_4$

Т.к. $10^{100} = 2^{100} \cdot 5^{100}$, то $k_1 = 2^{n_1} 5^{m_1}$

$k_2 = 2^{n_2} 5^{m_2}$

$k_3 = 2^{n_3} 5^{m_3}$

$k_4 = 2^{n_4} 5^{m_4}$.

(т.к. других делителей, кроме 2 и 5, быть не может)

$10^{100} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$

$10^{100} = \frac{10^{100}}{k_1} + \frac{10^{100}}{k_2} + \frac{10^{100}}{k_3} + \frac{10^{100}}{k_4}$

$\Downarrow$

$1 = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}$

Наименьшие значение k: 2; 4; 5; 8; ...

Очевидно, что 4-х угольника в котором одна из сторон равна $\frac{1}{2}$ периметра не существует.

Предположим, что одна из k $k_1 = 5$. Наибольшее значение $\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ (т.к. $k_2 \neq 2$) $= \frac{3}{4}$

Тогда $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < 1$. При $k_1 > 5$ итоговая сумма получается еще меньше. Значит, единственно возможное значение: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$.

Из этого следует, что $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = \frac{1}{4} \cdot 10^{100}$.

4-х угольник, в котором все стороны равны — ромб.

③ Назовем ситуацию „циклом" когда под n_1 пишется n_2, под n_2 — n_3 ... под n_k — n_1. Длина такого цикла — k.

Очевидно, что все числа делятся на циклы длины >1.

Каждое число используется ровно в 1 цикле. Т.к. всего чисел нечетное кол-во, то должен быть хотя бы один цикл нечетной длины. В нем рациональны суммы:

$n_1 + n_2$
$n_2 + n_3$
$n_3 + n_4$
...
$n_m + n_1$

Сумма двух рациональных чисел рациональна (разность тоже). Следовательно:

$(n_1+n_2)-(n_2+n_3)+(n_3+n_4)-\ldots+(n_m+n_1)$ — рационально

$\Downarrow$

$2n_1$ — рационально. $\Rightarrow n_1$ — рационально

Аналогично можно доказать, что любое число в данном цикле рационально.

Чтобы количество рациональных чисел было минимально, нужно ~~чтобы~~ чтобы был 1 „нечетный" цикл минимальной длины (т.к. длина >1, то это 3). Оставшиеся 2016 чисел могут быть иррациональны:

$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	...	$1008+\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	...	$1008-\sqrt{2}$	1	2	3
$-\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}$	...	$1008-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	...	$1008+\sqrt{2}$	3	1	2

В данном примере ~~2016~~ 1008 циклов длины 2, с парами типа $(a+\sqrt{b})$ и $(a-\sqrt{b})$ их сумма $2a$ — рац.

И один цикл длины 3, состоящий из рац. чисел.

+