ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА (заполняется оргкомитетом): 10 – 03

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ (ДД.ММ.ГГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ: 01.02.2019

ВТОРОЙ ДЕНЬ: 02.02.2019

ФАМИЛИЯ: КУРАГИН

ИНИЦИАЛЫ: Е. А.

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО): 10

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ: 10

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается): 11

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	6	–	7	7	7	0	2	50

Председатель жюри: _____ /И.С. Рубанов/

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№1. (6)

Заметим, что среди 4х подряд идущих чисел обязательно найдётся число $a \vdots 4 \Rightarrow$

Обозначим a за $4k$ ($a \geq 100 \Rightarrow k \geq 25$) и рассмотрим 4 случая:

1) $4k; (4k+1); (4k+2); (4k+3)$
2) $(4k-1); 4k; (4k+1); (4k+2)$
3) $(4k-2); (4k-1); 4k; (4k+1)$
4) $(4k-3); (4k-2); (4k-1); 4k$

(Случаи в зависимости от полож. числа $4k$. Остальные 3 числа выражены через $4k$)

В 1 случае возьмем числа $(4k+1)$, $(4k+2)$ и $(4k+3)$, тогда их $\sum = 12k+6 = 6(2k+1) = 2 \cdot 3 \cdot (2k+1)$ – 3 разл. числа.

В 2 случае: $(4k-1)$, $4k$ и $(4k+1) \Rightarrow$ их $\sum = 12k = 3 \cdot 4 \cdot k$

В 4 случае: $(4k-3)$, $(4k-2)$ и $(4k-1) \Rightarrow$ их $\sum = 12k-6 = 6(2k-1) = 2 \cdot 3(2k-1)$

~~В всех случаях~~ Т.к. $k > 25$ (по док. выше) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2k+1 > 51$ и $2k-1 > 49 \Rightarrow \begin{cases} 2k+1 \neq 3 \text{ и } 2k+1 \neq 2. \\ 2k-1 \neq 2 \text{ и } 2k-1 \neq 3. \\ k \neq 4 \text{ и } k \neq 3. \end{cases}$

Все ~~разложения~~ суммы представлены произведением 3 разл. нат. чисел $> 1 \Rightarrow$ утверждение задачи доказано.

+

№2.

Докажем, что $x_n > x_{n+1}$ для любого n из чего очевидно следует утв. задачи.

$x_n = 2^n(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}) = 2^{n+1} \cdot \left(\frac{\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}}{2}\right) = 2^{n+1} \cdot \left(\frac{\sqrt[2^n]{b} + \sqrt[2^n]{a}}{2} - \sqrt[2^n]{a}\right) \geq$

$\geq 2^{n+1} \cdot (\sqrt[2^{n+1}]{ab} - \sqrt[2^n]{a}$

№ 2. (7)

Докажем, что $x_n > x_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$:

$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right) = 2^{n+1}\left(\frac{\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}}{2}\right) =$

Т.к.

$= 2^{n+1} \cdot \left(\frac{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right)$ +

Т.к. $b > a > 1$, то и $\sqrt[2^{n+1}]{b} > \sqrt[2^{n+1}]{a} > \sqrt[2^{n+1}]{1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a} > 1 + 1 = 2 \Rightarrow$

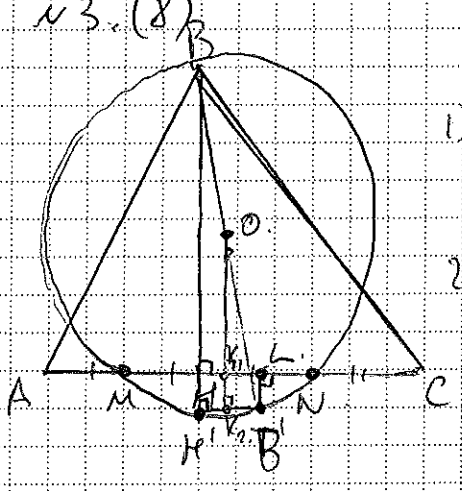
$\Rightarrow \frac{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}}{2} > 1$

$x_n = 2^{n+1} \cdot \left(\frac{\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) > 2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}\right) =$

$= x_{n+1} \Rightarrow x_n > x_{n+1}$, ч. и т.д.

Т.к. это верно для любого $n \in \mathbb{N}$, то в послед. $x_1, x_2, \ldots$ каждый последующий член < предыдущего $\Rightarrow$ эта послед-ть убывает.

№ 3. (8)



Док-во:

1) Продлим BK до пересеч. с Ω в т. K' (отл. от B)

2) $\angle BK'B' = 90^\circ$ (т.к. BB' - диаметр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BK'B' = \angle BKC = 90^\circ \Rightarrow K'B' \parallel AC$

3) $B'L \perp AC$

4) O - сер. BB' (центр Ω)

5) ~~серед.~~ $\perp$ из O на $AC \cap AC = K_1$ и $\cap K'B' = K_2$.

6) В 4х уг. $K_2H_1'HK_1$ и K_2BLK_1 все $\angle = 90^\circ \Rightarrow$ это прямоуг. (по определению) $\Rightarrow$ по св-ву прямоуг. $H'K_2 = HK_1$ и $K_2B' = K_1L$

7) Т.к. O – центр Ω, и $OK_2 \perp AC \Rightarrow$ т.к. $AC \parallel H'B' \Rightarrow OK_2 \perp H'B'$, а $H'B'$ – хорда $\Omega \Rightarrow OK_2$ – сер. пер. к $H'B' \Rightarrow H'K_2 = K_2B'$.

8) По п. 6) и 7) $HK_1 = H'K_2 = K_2B' = K_1L$

9) OK_1 – сер. пер. к $MN \Rightarrow MK_1 = K_1N$.

10) по п. 8) и 9) $MH = MK_1 - HK_1 = NK_1 - K_1L = NL$.

11) т.к. $AC = AM + MH + HN + NC = 2(MH + NC) = 2(LN + NC) = 2LC \Rightarrow$
$\Rightarrow L$ – сер. AC.

12) LB – сер. пер. к $AC \Rightarrow AB' = CB'$, ч.т.д.

№ 10. 5. (10)

Док-во проведём методом от противного:

1) Пусть нашлось ~~какое-то~~ такое l, что $a_n \not\vdots\, l$ при любом $n \in \mathbb{N}$

2) Рассмотрим число a_{l^2}: пусть $a_{l^2} = X$.

3) Заметим, что если $t^2 < n < (t+1)^2$, то $t < \sqrt{n} < (t+1) \Rightarrow [\sqrt{n}] = t$.

~~4) Посмотрим чему равняется число a_{l^2+1}:~~
~~$a_{l^2+1} = a_{l^2} + a_{[\sqrt{l^2}]} = a_{l^2} + a_l$.~~

4) Докажем, что если $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ – простые числа, то найдется число взаимнопростое с каждым из них

~~a) Пусть такого нет $\Rightarrow$ возьмём~~

a) Докажем, что найдётся число $\vdots\, p_n$:

• Пусть нет, тогда рассмотрим число ~~$a_k > p_n$~~ a_{k^2}, такое, что $k \geq p_n$, тогда:

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~~Ас~~ $a_k^2 \equiv_{p_n} x$? $\quad a_k \equiv_{p_n} t$

$a_{k+1}^2 = a_k^2 + a_k \equiv_{p_n} x + t$

. . . .

$a_{k+m}^2 = a_k^2 + m \cdot a_k \equiv_{p_n} x + mt.$

~~Заметим, что т.к.~~

$a_{(k+1)^2} = a_k^2 + (2k+1) a_k \equiv_{p_n} x + (2k+1)t.$

• Заметим, что т.к. x и t взаимнопросты с p_n, то числа вида $x, (x+t), \ldots (x+(p_n-1)t)$ пробегают все остатки по mod p_n $\Rightarrow$ какое-то из них $\vdots p_n$ $\Rightarrow$ какое-то $a_i \vdots p_n$, т.к. i ?

~~Доб) Возьмём наименьшее $a_m \vdots p_n$ (любому из простых?).~~

~~$\Rightarrow a_m = p_i \cdot p_i \cdot \ldots \cdot p_n \cdot l + a_{[\sqrt{m}]}$~~

~~$a_{m+1} = a_m + a_{[\sqrt{m}]}$ ← взаимнопростоваты ост.~~

~~$a_{m+2} \equiv a_m + a_{[\sqrt{m+1}]} + a_{[\sqrt{m}]}$.~~

~~Заметим, что данное высказывание справедливо также для различных степеней простых чисел.~~

~~Если есть~~ Найдём такое число $x \geq \frac{(l-1)^2}{4}$, что $(a_x, l) = 1$, то

почему такое x найдётся?

тогда: ~~$a_x^2 = y$~~ пусть $a_x^2 \equiv_l y$, тогда.

$a_{x^2+1} = a_x^2 + a_x \equiv_l y + m \quad (m, l) = 1.$

. . .

$a_{x^2+t} \equiv a_x^2 + t \cdot a_x \equiv_l y + tm.$

т.к. $(m, l) = 1 \Rightarrow$ эти $\geq t$ остатков пробегают все по mod t.

$a_{x^2+i} \equiv_l 0 \Rightarrow a_{x^2+i} \vdots l$

при нек. $i \leq 2x+1$.

$a_{x^2+2x+1} = a_x^2 + (2x+1) a_x \equiv_l y + (2x+1)m$

t

ч.т.д.

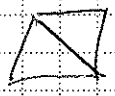
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№4.

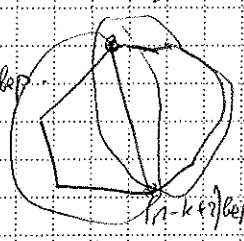
Ответ: $n(n-1)$.

1) Заметим, что триангр. ~~эта~~ ~~многоугольник~~ n-угольник можно разделить на $(n-3)$ диагонали.

Докажем:

По индукции. База:  4х уг. 1 диаг. - верно.

Переход $\leq n \to n+1$.



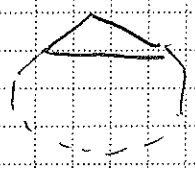
1) Проведем произв. диаг.

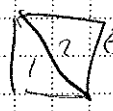
2) ~~Оставим~~ о.

2) n угольник разбился на 2 многоуг., которые по предп. индукции бьются на $(k-3)$ и $(n-k-1)$ диаг. соотв.

3) $\sum$ диаг. в n уг. $=(k-3)+(n-k-1)+1=n-3$, ч.и.т.д.

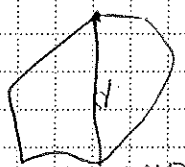
2) ~~Заметим, что разбиение~~ По инд. докажем, что в триан. гр. ящ. ≥ 2 есть такой Δ:



База: $n=4$  ← верно.

Переход $\leq n \to n+1$.

1) Сделаем триангуляцию и возьмём произв. диаг.



2) В ~~остальные разбиение~~ получ. многоуг. по предположению есть по 2 таких Δ => не более 1 из них имеют ребро d. верно

хотя бы 2 имеют 2 стороны из многоуг., ч.и.т.д.

~~3/1~~

№ 10.1.

Ответ: 9.

Докажем, что все рыцарями быть не могли.

Рассмотрим человека, сказавшего, что его число >10. Во второй раз он сказал, что его число $<a$ ($a \le 10$) $\Rightarrow$ он солгал хотя бы в одном из утверждений (т.к. они противоречивы) $\Rightarrow$ он — лжец $\Rightarrow$ рыцарей среди них ≤ 9.

+

Пример.

№	фраза 1	фраза 2	число	
1	>1	<2	1,5	— рыцарь
2	>2	<3	2,5	— рыцарь
3	>3	<4	3,5	— рыц.
4	>4	<5	4,5	
5	>5	<6	5,5	— " —
6	>6	<7	6,5	
7	>7	<8	7,5	
8	>8	<9	8,5	
9	>9	<10	9,5	— рыцарь
10	>10	<1	5	— лжец

9 шт.

№ 10.2.

Т.к. $(a+b+c) \vdots d$ по условию, то и $(a+b+c)+d \vdots d \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{100} \vdots d$. Т.к. $d \in \mathbb{N} \Rightarrow d = 2^k \cdot 5^l$.

Пусть $d > 10^{100}/4$. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 10^{100}/2 \\ d = 10^{100} \end{array}\right.$ (т.к. d представимо в виде произв. каких-то степеней 2 и 5).

$d \ge a+b+c$ — противоречие (в выпук. 4-хуг. сумма длин 3х сторон > длины 4)

$d \le \frac{10^{100}}{4}$

+

Аналогично получаем, что $a \le \frac{10^{100}}{4}$, $b \le \frac{10^{100}}{4}$, $c \le \frac{10^{100}}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ их сумма $a+b+c+d < 10^{100}$ и рав-во достигается только при max значениях a, b, c и $d \Rightarrow a=b=c=d=\frac{10^{100}}{4} \Rightarrow$

⇒ у этого четырехуг. все стороны = ⇒ он ромб (по опред.)

№ 10.3.

Ответ: 2018 чисел.

Пример:

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$		$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$		$\sqrt{n}$	?
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{6}$	...	$\sqrt{n}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$		...	$\sqrt{n}$	?

1008

Оценка:

1) Докажем, что в таблице не могло быть ровно 1 рациональное число:

а) Предположим, что это не так и у нас есть 2018 иррац. чисел ($r_1, r_2, \ldots, r_{2018}$) и одно рацион. ($a$).

б) Рассмотрим столбец, где в верхней клетке стоит a:

- В нижней клетке a стоять по усл. не может ⇒ ⇒ в нижней клетке стоит r_i.
- Тогда $(a + r_i) = \frac{p}{q}$ (рац. число), что невозможно (т.к. Σ рац. и иррац. числа – иррац. число).

в) Получили противоречие ⇒ наше предположение неверно.

2) Докажем, что иррациональных чисел четное кол-во: (иррац. числа – это $r_1, r_2, \ldots, r_n$)

а) Рассмотрим столбец, где в верхней клетке стоит r_i ⇒

⇒ В нижней клетке число не может быть рациональным (по доказ. ранее).

⇒ В нижней клетке стоит r_j.

б) Аналогично поступим со столбцом, где сверху стоит r_j.

в) Будем проделывать аналог. действия, пока не придем к

столбца, где снизу будет r_i.

г) Мы обязательно придем к такому, т.к. на каждом шагу снизу будет стоять какое-то иррац. число, не задействованное ранее (т.к. числа не повт.) или r_i, а т.к. чисел конечное кол-во рано или поздно мы придем к тому, что снизу стоит r_i.

д) По условию: $r_i + r_j = \frac{p_1}{q_1}$ Полученные числа

$r_i + r_k = \frac{p_2}{q_1}$

выпишем по порядку $r_i, r_j, \ldots r_k$ и пронумеруем для удобства как: $r_1', r_2', r_3', \ldots r_m'$

е) По условию:

$$\begin{cases} r_1' + r_2' = \frac{p_1}{q_1} \\ r_2' + r_3' = \frac{p_2}{q_2} \\ \ldots \\ r_m' + r_1' = \frac{p_m}{q_m} \end{cases}$$

Сложив все рав-ва получим:

$$2(r_1' + \ldots + r_m') = \frac{p_1}{q_1} + \ldots + \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_1'}{q_1'} \text{ (рац. число)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} r_i' = \frac{p_1}{2q_1'} \text{ - рац. число.}$$

ж) Сложив первые $(m-1)$ рав-в получим:

$$(r_1' + \ldots + r_m') + (r_2' + r_3' + \ldots + r_{m-1}') = \frac{p_2'}{q_2'} \text{ (рац.)}$$

$$\frac{p_1'}{2q_1'} \text{ (рац.)}$$

$$\sum_{i=2}^{(m-1)} r_i' = \frac{p_2'}{q_2'} - \frac{p_1'}{2q_1'} = \frac{p_3'}{q_3'} \text{ - рац.}$$

з) Продолав несколько раз аналогичные действия (выбираем $(m-3)$ подряд идущих р-в начиная со второй строки, потом $(m-5)$ с 3й ... $(m-2k+1)$ с k строки) Получаем:

~~неадекватно~~ верно

предмет Математика класс 10 шифр 10-03

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

• После каждого такого действия кол-во иррац. чисел в сумме уменьшалось на 2, а остав. сумма остав. рац. чисел.

• ~~Вариант~~ Пусть ~~после~~ $m = 2k+1 \Rightarrow$ через k действий мы убрали $2k$ иррац. чисел из суммы, но она осч. ~~на~~ рац. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ осталось ~~одно~~ $r_{k+1} = \frac{p_i}{q_i}$ – противоречие.

• ~~IV вариант $m = 2k \Rightarrow$ через k действий все числа исч. из суммы = 0 она будет~~

• $m \neq 2k+1 \Rightarrow$ ~~все~~ наших чисел четное кол-во.

и) Отбросим ~~эти~~ все рассмотренные столбцы и аналог. алгоритм проведём для остав. таблицы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Продолжая несколько раз ~~все иррац. числа будут~~ отброшены. Пол (~~если нет, продолжаем~~) пока не останется больше иррац. чисел, которые мы не расм.

ж) В с. иррац. числа разбились на циклы нечётной длины)

$\Rightarrow$ Иррац. чисел чётное кол-во, т.к. т.д. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. их не 2018 (кол-во в начале) их ≤ 2016.

Пример:

r_1	r_2		r_{1008}	$-r_1$	$-r_2$		$-r_{1008}$	1	2	3
$-r_1$	$-r_2$		r_{1008}	r_1	r_2		r_{1008}	2	3	1

1008 1008

+

Вы $\begin{cases} \sqrt{r_i + r_j} \\ r_i > 0 \end{cases}$ – для всех i, j

$r_k = \sqrt{2} + k$

№4.

1) Заметим, что $P_{m+1}(x) = P_m(x)\cdot x^2 + a_{m+1}$

2) Докажем, что утверждение задачи верно для всех $n \geq 2018$.

3) Т.к. $P_n(x)$ ~~содер~~ состоит из только одночленов, где x в сет. степени $\Rightarrow$ если некоторое y — корень $P_n(x)$, то и $-y$ также корень. $\Rightarrow$ все $a_k < 0$ ($k > 2018$).

a_{2018} м.б. >0 равно

4) Коэфф. при старшем члене положителен $\Rightarrow$ ветви графика этих многочленов будут направлены вверх. (т.к. $x^{\text{чт-чет. степ.}}$, то обе ветви имеют такое направ.) (ветви графика — частографика — слева от самого левого экстремума ~~корня~~ справа от наиб.).

5) График имеет такой вид: (для $P_n(x)$)

+.

6) Заметим, что при умнож. на x^2 график ~~ст~~ становится „острее" (~~из~~ изменяется вид графика, но функция появляется корень и участки „+" и „−" остаются теми же).

7) При прибавлении $a_{n+1} < 0$ получаем, что график опускается вниз $\Rightarrow$ пересеч. левой ветви с осью OX сдви

предмет	Математика	класс	10	шифр	10-03

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

нечетная влево $\Rightarrow$ a_{n+1} будет левее $a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} < a_{n+1}$, т.е.

и т.д.