

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	;	-
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА
(заполняется оргкомитетом)

10-13

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ
(ДД.ММ.ГГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

01 . 02 . 2019

ВТОРОЙ ДЕНЬ

02 . 02 . 2019

ФАМИЛИЯ

ВОЛЯНСКИЙ

ИНИЦИАЛЫ

В. И.

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО)

10

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ

10

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается):

8

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	7	7	7	7	7	7	2	65

Председатель жюри: И.С. Рубанов /И.С. Рубанов/

**РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ**

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

10

шифр

10-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№3

Пусть все роцары \Rightarrow из первых десяти восклицаний что начинаем, что все их числа больше одного. Но из воск. "меньше 1" мы начинаем, что какое-то число меньше 1 \Rightarrow противоречие \Rightarrow роцарей max 9.

Пример. P-15 P-25 P-35 ... P-95 L-5
 A_1 A_2 A_3 ... A_9 A_{10}
 B_1 B_2 B_3 ... B_{10} B_3

где против человека написано его номер, а под ним - по очереди в 1 вопросе (A_i , i-номер места) и B_1 и B_i - аналогично.

Заметим, что роцары сдвинулись, поэтому правду я пишу сдвинуто.

№2

Пусть его сторона это $a \geq b \geq c \geq d \Rightarrow a+b+c+d \Rightarrow a+b+c+d \Rightarrow 6^{100}d \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 5^{100} \cdot 2^{98}$, где $0 \leq \alpha \leq 100$, $0 \leq \beta \leq 100$

Аналогично, $a = 5^{\alpha} \cdot 2^{\beta}$, $b = 5^{\alpha} \cdot 2^{\beta}$, $c = 5^{\alpha} \cdot 2^{\beta}$

$a+b+c+d = 10^{100}$, т.к. a - наибольшее, то $a \geq \frac{10^{100}}{4} = 5^{100} \cdot 2^{98}$,

а т.к. a имеет вид $5^{\alpha} \cdot 2^{\beta}$, то при $\alpha \leq 99$ $5^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \leq 5^{99} \cdot 2^{100} < 5^{100} \cdot 2^{98}$
 противоречие \Rightarrow

$\alpha = 100 \Rightarrow \begin{cases} a = 5^{100} \cdot 2^{98} & (1) \\ a = 5^{100} \cdot 2^{99} & (2) \\ a = 5^{100} \cdot 2^{100} & (3) \end{cases}$

(2) $a = 5^{100} \cdot 2^{99} \Rightarrow a+c+d = 5^{100} \cdot 2^{99} = a$ т.к. это неестественно и-угольщик

(3) $a = 5^{100} \cdot 2^{100} \Rightarrow b+c+d = 0 \Rightarrow$ противоречие

$\begin{cases} a = 5^{100} \cdot 2^{98} \end{cases}$

$b+c+d = 3 \cdot 5^{100} \cdot 2^{98}$ Аналогичным рассуждением получаем, что $\begin{cases} b=c=d = 5^{100} \cdot 2^{98} \\ a = 5^{100} \cdot 2^{98} \end{cases}$

$a=b=c=d \Rightarrow$ ч.к. -
 роцарь
 ч.к.

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

10

шифр

10-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№3

Будем обозначать знак $a_i \rightarrow a_j$, то код a_i называется a_j

НУО общности будем считать, что

$\forall a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \dots \rightarrow a_{2k+1} \rightarrow a_1$ (МН закончен т.к. чисел конечно, и вернется в a_1 , если каждый число ставится в 2 стр. равно a_{2k+1})

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \in \mathbb{Q} \\ a_2 + a_3 \in \mathbb{Q} \\ \vdots \\ a_{2k} + a_{2k+1} \in \mathbb{Q} \\ a_1 + a_{2k+1} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 - (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) - \dots - (a_{2k} + a_{2k+1}) \in \mathbb{Q}$$

$$a_1 - a_{2k+1} \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} a_1 - a_{2k+1} \in \mathbb{Q} \\ a_1 + a_{2k+1} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Q} \\ a_2 \in \mathbb{Q} \text{ (из } a_1 + a_2 \in \mathbb{Q}) \\ a_3 \in \mathbb{Q} \text{ (из } a_2 + a_3 \in \mathbb{Q}) \\ \vdots \\ a_{2k+1} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

То есть, если есть "цикл" из иррациональных чисел, то они только четной длины (в них встречается четное кол-во a -шек)

т.к. всего чисел нечетно \Rightarrow есть цикл нечетной длины \Rightarrow он состоит из рациональных чисел. Его мин. длина = 3 (т.к. это наименьшее нечетное число, большее 2, а цикла длины 1 не бывает, в противном случае $a_1 = a_1$)

маж иррациональных $\rightarrow 8019 - 3 = 2016$

Пример:

$2+\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$	$3+\sqrt{5}$	$3-\sqrt{5}$	$\frac{1003+1009}{\sqrt{5}}$	$\frac{1009-1003}{\sqrt{5}}$	1	2	3
$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$3-\sqrt{5}$	$3+\sqrt{5}$	$\frac{1009-1003}{\sqrt{5}}$	$\frac{1003+1009}{\sqrt{5}}$	2	3	1

+

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

10

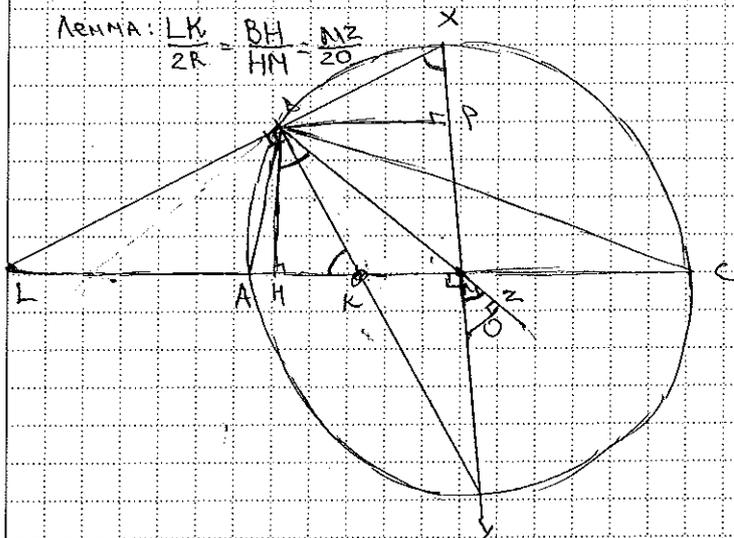
шифр

10-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№5

Лемма: $\frac{LK}{2R} = \frac{BH}{HM} = \frac{MZ}{ZO}$



ВК и ВL - внутр. и внешн. тисс.
BH - высота BH - медиана
O - центр впис. окруж. окр.
Z - проекция O на BH

Докажем что:

1. Если XY - т. пересечения OH с окружностью ($X \in ABC$) \Rightarrow LB проходит через X, KB проходит через Y (т.к. M - середина $\Rightarrow OM \perp AC \Rightarrow \angle MYH = \angle MYK$; $\angle AKY = \angle XKC$, но LB - вы диаметра, проходящая через середину хорды)

2. Пусть ZP - проекция B на $XY \Rightarrow BP = HM \subset BH \parallel XY$
 $\angle PKL = \frac{1}{2}(\angle AB + \angle CY) = \angle XYP = \frac{1}{2}(\angle AB + \angle AY)$ так как $\angle CY = \angle AY \Rightarrow \angle XHY = \angle BKL$

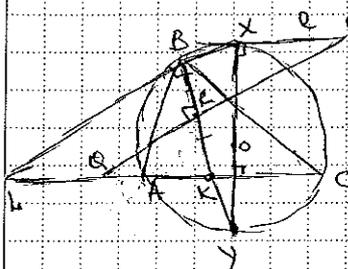
3. $\triangle BUX$ и $\triangle BKL$: $\begin{cases} \angle YBK = \angle LBK = 90^\circ \text{ (между тисс см. упр. 1)} \\ \angle BXS = \angle BKL \text{ (по доказ.)} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BUX \sim \triangle BKL \Rightarrow \frac{LK}{XY} = \frac{BH}{BP}$ (соотв. стороны и высоты к этим сторонам) \Rightarrow

$$\frac{LK}{2R} = \frac{BH}{HM}$$

4. $\angle OMZ = 90^\circ = \angle HMB = \angle HNM \Rightarrow$ прямые OMZ и MHN

$$\frac{BH}{HM} = \frac{MZ}{ZO} \Rightarrow \frac{LK}{2R} = \frac{BH}{HM} = \frac{MZ}{ZO} \quad \text{т.д.}$$



Заметим, что касательная к ω в точке X $\parallel AC$

(они обе $\perp XY$) пусть эта прямая

и пусть середина K ВК пересекает ℓ в точке O_1

A - середина ВК Q - пересечение сериры к ВК с LK

$QO_1 \parallel LB \Rightarrow$ по т. Фалеса $LQ = QK = \frac{LK}{2}$

$QO_1 \parallel LB$; $XO_1 \parallel AC \Rightarrow XO_1 \parallel LQ$; $QO_1 \parallel LK \Rightarrow XO_1, QO_1$ на-н \Rightarrow

$\Rightarrow QL = XO_1 = \frac{LK}{2}$

(т.к. Q ближе к XY чем L , то $QO_1 \parallel LX \Rightarrow O_1$ лежит на прямой l относительно X (в той полуплоскости от XY где нет A))

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

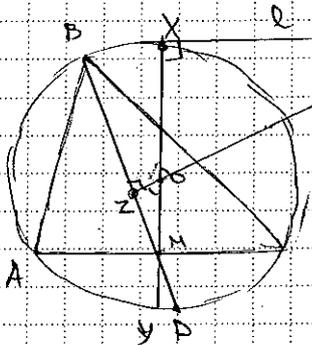
класс

10

шифр

10-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



Пусть l к BD через O перпендикуляр
 l в т. O_2 , а BD в точке Z
 т.к. O центр BD - хорда $\Rightarrow OZ \perp BD$
 $\angle ZOM \sim \angle XO_2O$ по углам \Rightarrow
 $\frac{ZO_2}{ZO} = \frac{ZO}{ZO} \Rightarrow XO_2 = \frac{MZ \cdot R}{OZ}$
 3. По лемме: $\frac{MZ}{OZ} = \frac{LK}{OZ} = \frac{MK \cdot R}{OZ} \Rightarrow XO_2 = XO_1 \Rightarrow$
 $O_2 = O_1 = O$ (они лежат на одной прямой) \Rightarrow

O' - т. пересечения дуг AB и BC \Rightarrow
 центр окружности ω , описанной около $\triangle BKO$, причем
 прямая l , проведенная через O и O' , является касательной к ω в т. O .

№4

Заметим, что $P_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot x^2 + a_{n+1}$ т.к. a_{n+1} - корень $P_n(x) \Rightarrow P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}$

Заметим, что $P_n(x) = P_n(-x) \Rightarrow P_n(x)$ - четная функция \Rightarrow

она симметрична относительно OY



т.к. $a_i \neq 0 \Rightarrow y = P_n(x)$ есть
 ненулевой корень \Rightarrow он либо
 положительной, либо отриц.
 если $x > 0$ - корень \Rightarrow
 из четности $x < 0$ - тоже корень,
 т.к. $-x < x \Rightarrow a_i$ - отриц.,
 или $\Rightarrow 2018$

Т.к. старшая степень $P_n(x)$ имеет положительный коэффициент, то

с какого-то момента $P_n(x) > 0$ и возрастает \Rightarrow график имеет
 вид, как на рисунке

Функция $P_n(x) = x^2 + a_{n+1}$ непрерывна \Rightarrow x - это возведение
 в степень, возведение в степень и сложение \Rightarrow при $x \rightarrow x_0$ $P_n(x) \rightarrow P_n(x_0)$

$P_{n+1}(x)$ - многочлен с полож. коэф. при старшем члене \Rightarrow начиная
 с некоторого момента он будет положительным. Пусть это (x', ∞) \Rightarrow $P_n(x)$ - корень
 $a_{n+2} = -x'$ (из симметрии)

Т.к. $P_{n+1}(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и $x' > 0$ т.к. $a_{n+1} < 0$
 в точке x' $P_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot x^2 + a_{n+1} = a_{n+1}$, но знаем, что $a_{n+1} < 0 \Rightarrow$

$P_{n+1}(x) < 0 \Rightarrow$ из непрерывности на промежутке (x', ∞) существует
 корень $x'' > x'$ из симметрии у $P_{n+1}(x)$ есть корень $-x''$ на $(-\infty, -x')$
 $a_{n+2} \leq -x'' < -x' = a_{n+1}$, где $n \geq 2018 \Rightarrow$ при $n \geq 2018$ $a_{n+1} < a_n \Rightarrow$
 монотонность последовательности a_n, a_{n+1}, \dots - убывающая \Rightarrow

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

10

шифр

10-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№6

Пусть дано числа: a ; $a+1$; $a+2$ и $a+3$

I случай: a - нечетно \rightarrow Рассмотрим $a+(a+1)+(a+2) = 3a+3 = 3(a+1)$
 $a+1$ - четно.

$$a+1 > 100 \Rightarrow \frac{a+1}{2} > 50 \Rightarrow a+(a+1)+(a+2) = 3 \cdot \frac{a+1}{2} \text{ где } 3 \neq 2 \text{ и } \frac{a+1}{2} > 50 \Rightarrow$$

$$\frac{a+1}{2} \neq 3 \text{ и } \frac{a+1}{2} \neq 6, \text{ притом } \frac{a+1}{2} \in \mathbb{N}, \text{ тогда } a+1 - \text{четное}$$

II случай: a - четно $\rightarrow (a+1)+(a+2)+(a+3) = 3a+6 = 3 \left(\frac{a}{2}+1\right)$

$$\text{Т.к. } a > 100 \Rightarrow \frac{a}{2} + 1 > 50 \Rightarrow 2 \neq 3 \frac{a}{2} + 1 \neq 2 \frac{a}{2} + 1 \neq 3 \rightarrow \text{все число } 3$$

преобразуем функцию, притом $\frac{a}{2} + 1 \in \mathbb{N}$, где a - четное ЧТД.

№7.

Заметим, что $\sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{a} \Rightarrow 2^n \sqrt[n]{b} > 2^n \sqrt[n]{a} \Rightarrow$ все члены последовательности
положительны \Rightarrow чтобы доказать, что $\{x_n\}$ - убывающая, достаточно

показать, что $\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1$ Откуда будет следовать требуемое

$$\frac{2^n (2^n \sqrt[n]{b} - 2^n \sqrt[n]{a})}{2^{n+1} (2^{n+1} \sqrt[n+1]{b} - 2^{n+1} \sqrt[n+1]{a})} > 1$$

$$\frac{(2^{2n} \sqrt[n]{b})^2 - (2^{2n} \sqrt[n]{a})^2}{2^{2n+1} (2^{n+1} \sqrt[n+1]{b} - 2^{n+1} \sqrt[n+1]{a})} > 1$$

$$\frac{(2^{n+1} \sqrt[n+1]{b} - 2^{n+1} \sqrt[n+1]{a})(2^{n+1} \sqrt[n+1]{b} + 2^{n+1} \sqrt[n+1]{a})}{2^{2n+1} \sqrt[n+1]{b} - 2^{2n+1} \sqrt[n+1]{a}} > 2 \quad (\text{т.к. } b > a \Rightarrow 2^{n+1} \sqrt[n+1]{b} - 2^{n+1} \sqrt[n+1]{a} > 0)$$

$$2^{n+1} \sqrt[n+1]{b} + 2^{n+1} \sqrt[n+1]{a} > 2$$

$$\text{Т.к. } b > a \Rightarrow 2^{n+1} \sqrt[n+1]{b} > 2^{n+1} \sqrt[n+1]{a} \text{ и } 2^{n+1} \sqrt[n+1]{1} = 1 \Rightarrow$$

неравенство верно ЧТД

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

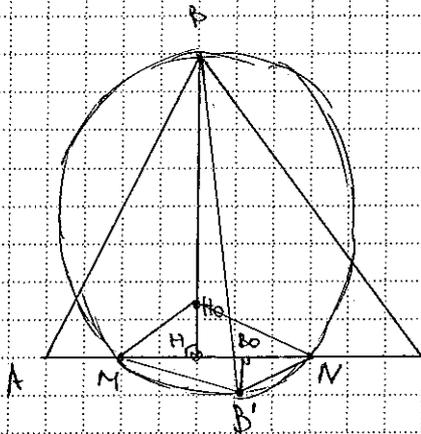
10

шифр

10-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№8



1. Пусть H_0 - ортоцентр MBN .
Как известно, точки H_0 и B' симметричны относительно середины стороны $MN \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle MH_0N = \triangle MB'N$ ~~т.к. $\angle H_0MN = \angle B'MN$ и $\angle H_0NM = \angle B'NM$~~
 $\angle H_0MN = \angle B'NM$

2. Если B_0 - проекция B на MN , то $NB_0 = NH$ (соответственные элементы) \Rightarrow
3. $CB_0 = CN + NB_0 = CN + NH = \frac{CN}{2} + \frac{NH}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow$

B_0 - середина AC

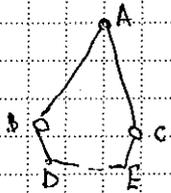
3. $B'B_0$ - перпенд. к $AC \Rightarrow AB' = B'C$ ЧТД.

№9

Докажем, что из одной вершины ^{разноцветные} ~~только~~ ребра ^{в хорошем разбиении} ~~идут~~ ^{идут}

только в несколько подряд идущих. Предположим противное \Rightarrow

есть два хороших ребра, идущих из одной вершины не в соседние.

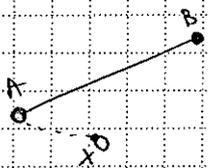


Заметим, что ABD, EC разбиты хорошим диагональным ребром. Т.к. из вершины A ребер больше нет \Rightarrow остальные ребра между $BD, EC \Rightarrow$ вершины A, B, C находятся в одной многоугольнике, но т.к. между B и C ребер нет \Rightarrow это хотя бы 4-угольник, противоречие \Rightarrow если из

какой-то вершины в хорошем разбиении проведено диагональ, то от нее ~~идут~~ ^{идут} в несколько подряд идущих вершин

(ну, скажем A -зеленая)

Возьмем разноцветные ребра AD, BE . Докажем, что найдется такая точка P и E , что все вершины A, C - белые, D, B - зеленые, а C и P - соседние.



Пусть (AD) из B проведено еще несколько диагоналей \Rightarrow они проведены в несколько вершин, идущих после A , и пусть они проведены в вершину $A-X \Rightarrow$ вершина $A-X$ - белая (т.к. B - зеленая) ^{и последняя точка}

Тогда, аналогично BX - разноцветное ребро \Rightarrow т.к. из B ребер нет, то есть ребра из $X \Rightarrow$ они ~~идут~~ ^{идут} в вершину $B-Y \Rightarrow B-Y$ - зеленое \Rightarrow

Аналогичными рассуждениями приходим к тому, что несколько вершин после X - белые, после Y - зеленые \Rightarrow т.к. всею вершинами конечно то процесс закончится, и мы найдем искомые точки C и D .

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА

класс 10

шифр 10-13

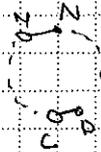
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Аналогично, получаем, что с другой стороны от ребра АВ существует соседняя вершина

М и N, также, что А..М - белое, М..В - черное

если раскраска хорошая, то она имеет такой вид,

вид,

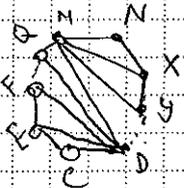


М..D - черное

М..C - белое

Докажем, что любая раскраска такого вида хорошая.

Действительно, соседние вершины М с М..D, а D с C..M имеют требуемое различие!



Все хорошие раскраски имеют вид, который был изображен.

Тогда, для определения их количества, необходимо выбрать систему подсчета:

1. Выбираем $n \geq k > 1$ - количество белых вершин

($k \neq 0$ г.к. иначе все черное ϵ , если $k = n$, то все белое ϵ)

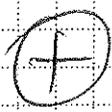
2. Выбираем вершину v_i , называем ее по часовой стрелке, красим последующие вершины в белый цвет

Заметим, что таким образом мы получим все раскраски, каждая раскраска встретится ровно один раз \Rightarrow

Всего раскрасок = $(n-1)n$ (то есть способов выбрать количество вершин, а потом одну вершину, и затем

для каждого $(n-1)$ случая в первом, есть ровно n случаев во втором)

Ответ: $(n-1)n$ хороших раскрасок



РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА

класс 10

шифр 10-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 10

Докажем для всех простых k .

$$aR^2 + 1 = aR^2 + aR$$

$$aR^2 + 2 = aR^2 + aR = aR^2 + 2aR$$

⋮

$$a(R+1)^2 - 1 = a(R+1)^2 - 2 + aR = \dots = aR^2 + 2R aR$$

Если ~~какое-то~~ $aR : k \Rightarrow$ мы нашли такое число. Иначе, среди чисел $0aR, 2aR, \dots, (k-1)aR$ есть числа, дающие все остатки или делители на $k \Rightarrow$ есть остаток, который с aR^2 даст число делимое на k члг. (работает при $2R \geq k-1 \Rightarrow R \geq \frac{k-1}{2}$)

Заметим, что для $a, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \equiv c \pmod{k}$

$$a_x \equiv a_{x-1} + a_c$$

$$a_{c+1} = a_c + a_c$$

$$c_{c+1} = c_c + 2a_c$$

$$a_{c+2} = a_c + 3a_c$$

Для составного k . Если найдется такое R , что $(aR, k) = 1$, $R \geq \frac{k-1}{2}$, то рассуждения аналогичны рассуждениям для простого \Rightarrow (т.к. остатки числа $0aR, aR, \dots, (k-1)aR$ взаимно так же все остатки)

7

Пусть такого нет, тогда для всех $R \geq \frac{k-1}{2}$ $(aR, k) \neq 1$.

Если среди aR найдется та, которая кратно k то мы сделали то, что нужно \Rightarrow такой нет \Rightarrow для всех $R \geq \frac{k-1}{2}$ $k \mid aR, k \mid 1$

Т.к. чисел aR бесконечно, то найдем два таких числа

$$a_x \text{ и } a_y, \text{ что } (a_x, k) = (a_y, k) = e \text{ взаимно простые}$$

$$k \mid (a_x - a_y) \Rightarrow (a_x - a_y) = k \cdot c \Rightarrow a_x - a_y = k \cdot c$$

С т.к. всего возможных значений $k-1$

то будет такое x и y

$$a_x \equiv a_y \pmod{k}, \text{ т.е. } k \mid (a_x - a_y) \text{ с т.к. всего возможно } k-1 \text{ остаток}$$

$$\text{или } y \geq k, \text{ т.е. } a_y = a_{y-k} + a_c, \text{ где } 1 \leq c < k \Rightarrow a_c \pmod{k}$$

при $(c, k) = 1$ мы победили $\Rightarrow (c, k) \neq 1$. Заметим, что $z = x - y \geq$

два числа дающие одинаковый остаток при делении на k находятся на расстоянии, которое не делится на k