ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	-

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА
(заполняется оргкомитетом)

11-03

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ
(ДД.ММ.ГГГГ.)
ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

01 . 02 . 2019

ВТОРОЙ ДЕНЬ

02 . 02 . 2019

ФАМИЛИЯ КОЛПАЩИКОВ

ИНИЦИАЛЫ А . Д .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО) 11

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ 11

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается): 14

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ
(заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	5	–	0	7	7	7	7	–	47

Председатель жюри: _____ /И.С. Рубанов/

№ 11.1.

Заметим, что девятый и десятый (~~ско~~ люди, сказавшие, что их числа > 9 и 10 соответственно) быть рыцарями не могли, т.к. после этого им пришлось бы сказать по одной из перечисленных в условии фраз, ограничивающих их число сверху, каждая из которых утверждает, что загаданное число их точно меньше десяти (а, исходя из сказанных ими до этого фраз и факта, что все загаданные числа целые, их загаданные числа не меньше десяти).

~~Вот и~~ Получается, что рыцарей могло быть не более восьми, а на ~~число~~ такое количество у меня есть пример возможного распределения чисел и утверждений м-ду рыцарями и лжецами:

Человек:	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л
Заг. ч-ло:	2	3	4	5	6	7	8	9	6	6
Моё ч-ло>:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Моё ч-ло<:	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2

Существование возможности такой ситуации подтверждает ответ:
среди этих 10 человек могло быть 8 рыцарей максимум.

+

предмет математика класс 11 шифр

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 11.2. Из ~~формулы корней~~ решения квадратного трёхчлена с помощью дискриминанта, сущ-я корней у данных трёхчленов и их целости следует:

$$\begin{cases} a^2-4b \geq 0 \\ \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2} \in \mathbb{Z} \\ a^2-4b-4 \geq 0 \\ \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-4b-4}}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ т.к. разница м-ду целыми корнями цела, то $\sqrt{a^2-4b}$ – целое число

$\Downarrow$

a тоже целое, ведь иначе $\sqrt{a^2-4b}-a$ – не целое $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{a^2-4b}-a}{2}$ – ~~нет~~ тоже

$\Rightarrow \sqrt{a^2-4b-4} \in \mathbb{Z}$

$a \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{a^2-4b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2-4b$ – квадрат какого-то целого числа x

$\sqrt{a^2-4b-4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2-4b-4$ – квадрат какого-то целого ч-ла y

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \\ x^2-y^2=4 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$(x-y)(x+y)=4$

Перебираем возм-е знач-я $(x-y)$ и $(x+y)$:

$(x-y)$	$(x+y)$	
2	2	$\Rightarrow y=0;\ x=2$
-2	-2	$\Rightarrow y=0;\ x=-2$
4	1	$\Rightarrow y=-1{,}5$ так быть не может
-4	-1	$\Rightarrow y=1{,}5$ так быть не может
1	4	$\Rightarrow y=1{,}5$ не может
-1	-4	$\Rightarrow y=-1{,}5$ не может

y всегда в данном случае 0

$\Downarrow$

$a^2-4b-4=0$

$\Downarrow$

$a^2-4b-8=-4$ $\Rightarrow$ дискриминант трёхчлена $x^2+ax+b+2$ отрицателен $\Rightarrow$ трёхчлен решений не имеет

Что и требовалось доказать!

+

предмет математика класс 11 шифр

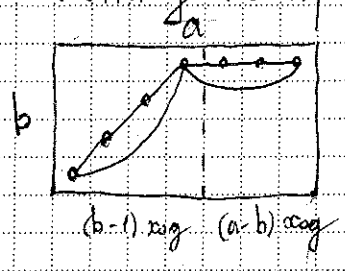
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 11.3.

Шахматный король одним ходом может переместиться либо в соседнюю по стороне клетку, либо в соседнюю по углу клетку.

⇓

Если ~~от между клетками рас~~ две клетки лежат в противоположных углах клетчатого прямоугольника $a \times b$, то королю придётся ~~прой~~ сделать на пути от одной к другой кол-во ходов не меньшее большего из этих значений минус один! $(a-1$ и $b-1)$, т.к. каждый ход по вертикали и горизонтали он смещается не более, чем на 1 клетку. Более того, за кол-во ходов, равные большему из $a-1$ и $b-1$, он сможет дойти ~~до~~ из одной клетки в другую, сначала идя по диагонали до упора в противоположную сторону прямоугольника ~~стенку~~, а потом ходами в соседнюю по стороне клетку по прямой в пункт ~~ра~~ назначения:

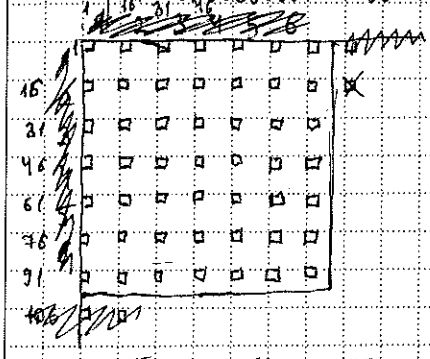


не умаляя общности

~~a-b~~ $(b-1)+(a-b)=a-1$

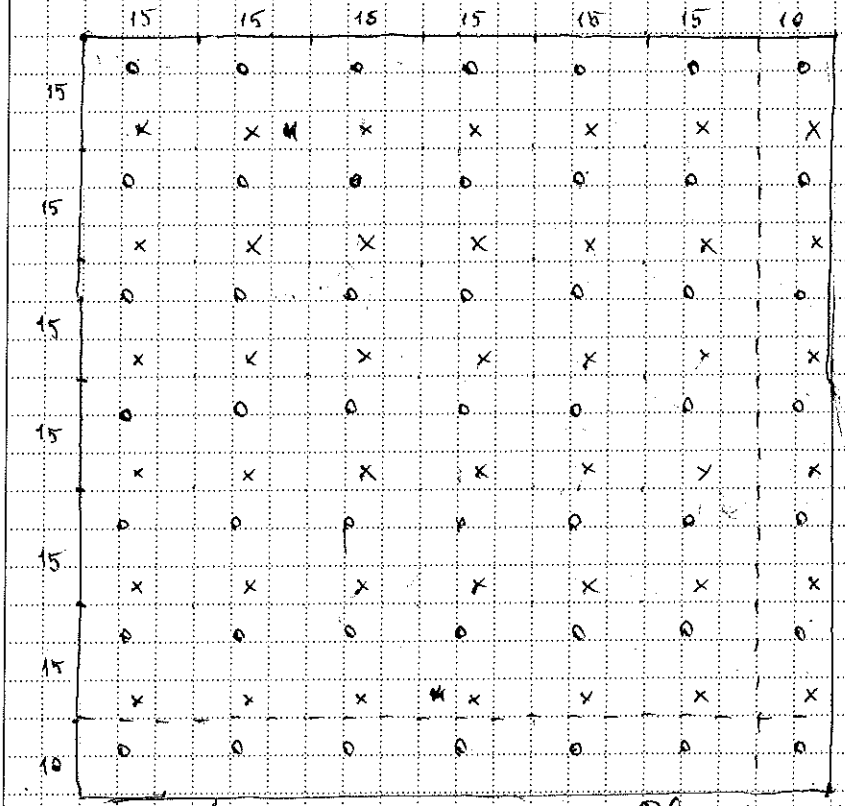
Для оценки максимального кол-ва отмеченных клеток сверху раскрасим клетки квадрата 100×100 в 225 цветов по паре остатков номеров

вертикали и горизонтали клетки по модулю 15. от 1 до 15



Получится ~~226~~ 225 наборов „квадратных узлов сетки" со стороной квадрата сетки 15.

Разделим эти наборы (цвета) на 3 типа: оба модуля ≤ 10. Ровно один модуль ≤ 10, оба „координаты" модуля ≥ 11.



У первого типа фиксированного цвета клетки стоят в ~~шесть~~ семь рядов по ~~шесть~~ семь клеток.

У второго в шесть рядов по семь или в семь рядов по шесть.

У третьего в шесть рядов по семь.

o – первый тип (пример)
x – второй тип (пример)

Две клетки ~~клетки~~ одного цвета, ~~соседние в ряду или в строчке или в сетке~~ лежащие в одном квадрате сетки все отмеченными быть не могут, т.к. м-ду ними расстояние 15.

в сетке 7×7 не более 16 отм. клеток* ?

в сетке 6×7 или 7×6 не более 12 отм. клеток

в сетке 6×6 не более 9 отм. клеток

~~(в сетке 2×7 не более 4~~

Почему?

Значит, среди клеток цветов первого типа (100 цветов) не более $100 \cdot 16$ отм. клеток.

Второго типа ($5 \cdot 2 \cdot 10 = 100$ цветов) – не более $100 \cdot 12$ отм. клеток.

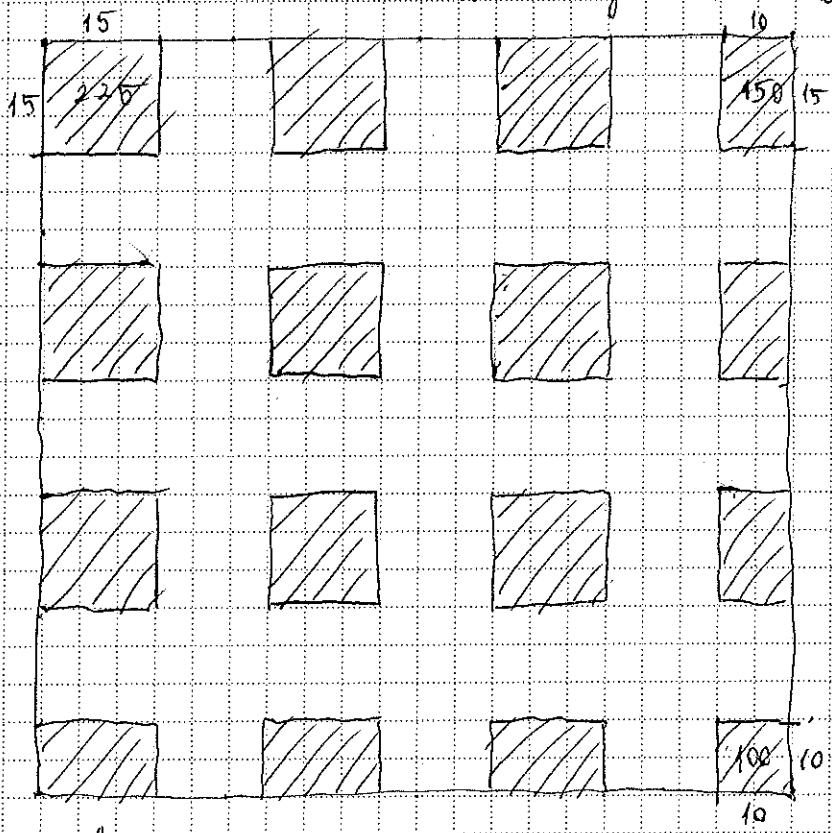
Третьего (25 цветов) отмечено не более $25 \cdot 9$ клеток.

$\Downarrow$

Всего отмечено не более

$1600 + 1200 + 225 = 3025$ клеток.

А на это кол-во у меня есть пример:



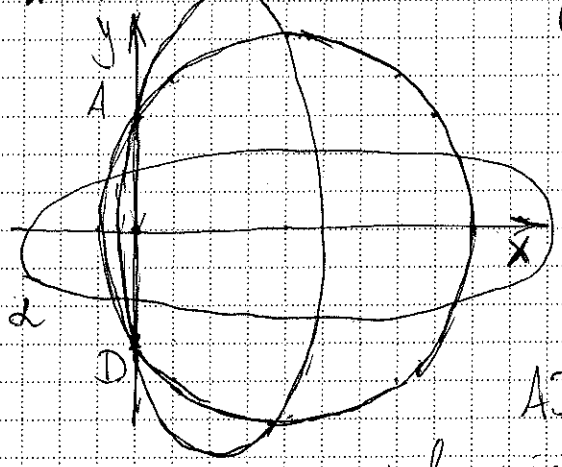
$225 \cdot 9 + 150 \cdot 6 + 100 =$
$= 2025 + 900 + 100 =$
$= 3025$

Ответ: 3025.

* в сетке 2×2 узла ≤ 1 отм клетка $\Rightarrow$ в сетке 2×7 узла $\leq 1 \cdot 4$ отм. клетка $\Rightarrow$ в сетке $7 \times 7 \leq 16$ отмеченных клеток. С сетками 6×7 и 6×6 аналогично

?

№ 11.5.



Возьмём плоскость ADC и ~~про~~ зададим в ней систему координат, в которой ось $x \perp AD$ и проходит в нуле через ~~в~~ середину AD, а ось y содержит AD и в нуле равна середине AD.

В плоскости ADB зададим ~~плоскую~~ аналогичную систему координат.

В системе ADC окружность, прох-я через C, A и D задаётся системой

$$\cancel{x^2+y^2=a^2} \quad \begin{cases} (x-c)^2+y^2=a^2 \\ c^2+m^2=a^2 \end{cases}$$

где a – радиус окр-ти, c – смещение центра окр-ти по оси x, а m – модуль координаты A и D по оси y.

Для системы ADB аналогично для окр-ти через B, A и D:

$$\begin{cases} (x-d)^2+y^2=b^2 \\ d^2+m^2=b^2 \end{cases}$$

где ~~y~~ d – смещение центра окр-ти по оси x, а b – её радиус.

Пусть между пл-ми ADB и ADC угол α. Т.к. мы знаем, что высота из B на ADC лежит на окр-ти ADC, а высота из C на ADB лежит на окр-ти ADB, то координаты точек ~~справедлив~~ ~~точки~~ E и E в соотв. системах координат удовлетворяют сл. системам соответственно:

$$\begin{cases} (x-c)^2+y^2=a^2 \\ c^2+m^2=a^2 \\ \frac{(x-d)^2}{\sin^2\alpha}+y^2=b^2 \\ d^2+m^2=b^2 \end{cases}$$

В уравнениях 1 и 3 у один и тот же? Почему?

$$\begin{cases} (x-d)^2+y^2=b^2 \\ d^2+m^2=b^2 \\ \frac{(x-c)^2}{\sin^2\alpha}+y^2=a^2 \\ c^2+m^2=a^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)+\frac{2xc-2xd+d^2-c^2}{\sin^2\alpha}=\frac{b^2}{\sin^2\alpha}-a^2$$

$$y^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)+\frac{2xd-2xc+c^2-d^2}{\sin^2\alpha}=\frac{a^2}{\sin^2\alpha}-b^2$$

|y| напрямую зависит от данных частей уравнений. Если докажем их рав-во, то докажем рав-во расстояний

~~Ту напрямую зависит от~~

E и F до ~~плоскости α~~ осей x и, соотв-но, плоскости α.

$$\frac{b^2}{\sin\alpha} - a^2 - \frac{2xc - 2xd + d^2 - c^2}{\sin^2\alpha} = \frac{a^2}{\sin\alpha} - b^2 - \cancel{2xd + 2xc}$$

$$- \frac{2xd - 2xc + c^2 - d^2}{\sin^2\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$b^2 - a^2\sin^2\alpha - 2xc + 2xd - d^2 + c^2 =$$

$$= a^2 - b^2\sin^2\alpha - 2xd + 2xc - c^2 + d^2$$

При этом $d^2 + m^2 = b^2$ и $c^2 + m^2 = a^2$

$$\Downarrow$$

$$d^2 - b^2 = c^2 - a^2$$

№11.6. Обозначим эти числа за $n, n+1, n+2, n+3$, где $n>100$ и натуральны.

Тогда мы можем составить суммы

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3\cdot(n+1)$$

$$(n+1)+(n+2)+(n+3)=3n+6=3\cdot(n+2)$$

Всё, что нам нужно, это представить $n+1$ или $n+2$ в виде произв-я 2-х нат. чисел >1. $n+1$ и $n+2$ разной ч-ти $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ одно из них чётное и >100 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ предст-ся в виде пр-я двойки и нат. ч-ла >50 $\Rightarrow$ Готово! Мы точно знаем, что ~~в одной раз~~ одну из ~~оу~~ сумм можно представить в виде пр-я трёх нат. чисел >1. Что и требовалось доказать!

+

№11.7. ~~Нужно~~ Достаточно доказать, что разница м-ду любыми двумя подряд идущими числами при вычитании второго из первого положительна.

$$x_n-x_{n+1}>0 \Leftrightarrow 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right)-2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)=$$

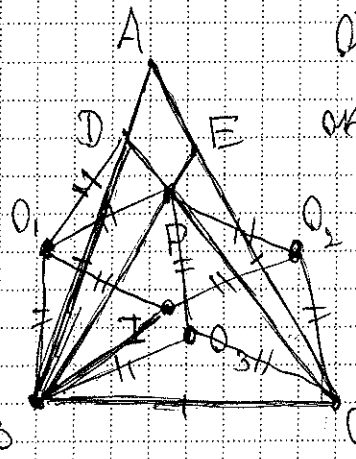
$$=2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1+2-2\sqrt[2^{n+1}]{a}\right)\overset{?}{=}2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)^2>0$$

$$2^n>0;\ \sqrt[2^{n+1}]{a}\neq 1 \Rightarrow 2^n\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)^2=2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-2\sqrt[2^{n+1}]{a}+1\right)>0$$

+

~~Что~~ Доказано!

№ 11.8.



Обозначим центры опис. окр-тей $\triangle BPD$ и $\triangle CPE$ за O_1 и O_2 соотв-но, а центр описанной окр-ти $\triangle PBC$ за O_3.

Заметим, что в опис. окр-тях $\triangle DBP$ и $\triangle ECP$ равные углы $\angle DPB = \angle EPC$ опираются на равные хорды $DB = EC \Rightarrow$ и радиусы окр-тей равны.

В опис. окр-ти $\triangle BPC$ на такую же хорду опирается ~~угол~~ $\angle BPC = 180^\circ - \angle DPB$, а значит и радиус там такой же, как и в ~~ор~~ других опис. окр-тях

$$\frac{BC}{2\cdot\sin\angle BPC} = \frac{DB}{2\cdot\sin\angle DPB} = \frac{EC}{2\cdot\sin\angle EPC}$$

Все три радиуса равны

~~Пусть~~ Обозначим вторую точку пересечения окр-тей за I.

Нужно доказать, что $\angle CBI = \angle ABI$ и $\angle BCI = \angle ACI$

Обозначим $\angle O_1PO_3$ за α, а $\angle O_3PO_2$ за β.

$\angle ABI = \angle DBI = \frac{\angle DO_1I}{2} = \frac{\angle DO_1P + \angle PO_1I}{2}$

$\angle PO_1I = 180^\circ - \angle O_1PO_2$, т.к. O_1PO_2I – ~~парал-~~ ~~лелограмм~~ – ромб по рав-ву сторон.

$\angle PO_1I = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\angle DO_1P = 180^\circ - 2\angle DPO_1$, т.к. $DO_1 = PO_1$

$\angle DPO_1 = 180^\circ - \angle O_1PC = 180^\circ - \angle O_1PO_3 - \angle O_3PC =$

$= 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}$, т.к. O_3PO_2C – ромб

$\angle DO_1P = 180^\circ - 2\angle DPO_1 = 180^\circ - 360^\circ + 2\alpha + \beta = 2\alpha + \beta - 180^\circ$

$\angle ABI = \frac{180^\circ - \alpha - \beta + 2\alpha + \beta - 180^\circ}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\angle CBI = \angle O_3BC + \angle O_3BI$ или $\angle O_3BC - \angle O_3BI$ * при другой расп-и вершин O_3 и I

$\angle O_3BC = \frac{180^\circ - \angle BO_3C}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle BPC}{2} =$

$= \frac{180^\circ - 2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$

$\angle O_3BI = \angle O_3BP - \angle IBP =$

$= \frac{\alpha}{2} - \frac{\angle IO_1P}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \frac{\beta}{2} + \alpha - 90^\circ$

$\angle CBI = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \alpha - 90^\circ = \frac{\alpha}{2}$

$\angle CBI = \angle ABI = \frac{\alpha}{2}$

Для $\angle BCI$ и $\angle ACI$ аналогично.

Доказано!

* но в этом случае $\angle O_3BI$ будет равен $\angle IBP - \angle O_3BP$, что по формулам противоположно изначальному и равно $90^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}$ результат не изменится

предмет математика класс 11 шифр

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№11.9.

m не более 28, т.к. все ученики сходили в бассейн от 1 до 30 раз и все сходили разное кол-во раз.

Если $m = 30$, то все кол-ва дней похода были использованы ⇒ ⇒ был ребёнок, который сходил 30 раз ⇒ все остальные дети не могли иметь такого дня, чтобы они сходили, а он – нет.

Если $m = 29$, то по вышеуказанной причине не могло быть сходившего 30 раз ⇒ ⇒ были исп-ны все кол-ва от 1 до 29.

Ребёнок, сходивший 1 раз обяз-но сходил в день, в который сходившего 29 раз в бассейне не было (чтобы посещаемость последнего не „поломала" его посещаемость). Значит, чтобы не „поломать" посещаемость сходившего 1 раз, и остальные дети должны ходить в бассейн не в тот день, что сходивший 1 раз. Но тогда им придётся ходить лишь в те дни, что сходивший 29 раз. Противоречие, иск посещаемость будет „поломана".

предмет математика класс 11 шифр

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

А на 28 учеников я могу построить пример с индукцией по кол-ву дней в месяце и кол-ву детей (детей будет на 2 меньше, чем дней, а дней будет чётное кол-во).

База: 4 дня и 2 ребёнка:
1 реб.: 1 и 2 день.
2 реб: 2, 3 и 4 день.

Переход: от $2n$ дней и $2n-2$ детей к $2n+2$ дней и $2n$ детей:

Есть $2n+2$ дня и дети с кол-вами походов от 2 до $2n+1$. Мы умеем расставлять детей от 2 до $2n-1$ похода на $2n$ дней. Сделаем это с соотв-ми детьми на первых $2n$ днях. Но потом каждого из этих детей заменим на ребёнка с кол-вом походов на 1 больше и добавим к расписанию каждого день $2n+1$. Будут исп-ны дети от 3 до $2n-1$ и у ~~кажд~~ любой пары ~~до сих пор~~ всё ещё будет по дню для каждого из них, в который не ходили другой (среди первых $2n$ дней, те же, что были у соотв.

предмет математика класс 11 шифр

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

пар до замены). Теперь ~~расставим~~ составим расписание для сходивших 2 и $2n+1$ дней. Первый пойдёт в ~~день~~ дни номер $2n+1$ и $2n+2$ и будет иметь день $2n+2$, в который не сходил никто из уже расставленных, а уже расставленные будут иметь такие дни для него в первых $2n$ днях. Второй же пойдёт во все дни, кроме $2n+1$-го, тогда ~~сходивший на 2 будет~~ все ост-е будут иметь его, что бы не быть „поглощёнными" расписанием сходившего $2n+1$ раз, а он будет иметь $2n+2$ день для всех, кроме сходившего 2 раза и в первые $2n$ дней для него.

Переход доказан. Следуя индукции построения, дойдём и до 30 дней и 28 учеников.

Пример построен!

+