ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	-

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА (заполняется оргкомитетом): 11-14

ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ (ДД.ММ.ГГГГ.)
ПЕРВЫЙ ДЕНЬ: 01.02.2019
ВТОРОЙ ДЕНЬ: 02.02.2019

ФАМИЛИЯ: САВЕЛЬЕВ

ИНИЦИАЛЫ: А. В.

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО): 10

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ: 11

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается): 14

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	7	0	7	7	7	7	7	63

Председатель жюри: _____ /И.С. Рубанов/

11.1. Ответ: 8.

Пример: Пусть $i^{ый}$ человек загадал число $i+1$ ($1 \le i \le 8$, $i \in \mathbb{Z}$) и впервый раз сказал, что его число больше i, а во второй меньше $i+2$. Остались фразы „Больше 9", „Больше 10", „Меньше 1", „Меньше 2". Пусть оставшиеся двое загадали 1 и 2, тогда они оба лгецы (сказали произвольные фразы из оставшихся)

Оценка: Заметим, что те, кто сказали, что их число „Больше 9" и „Больше 10" ~~солгали~~ лгецы ~~высказывались~~. Действительно, в 1ый раз они сказали, что их число ≥ 10 (т.к. целое >9 должно быть ≥ 10), ~~значит~~ а во второй раз, что их число < 10 (или еще меньше), что не может быть правдой $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ есть min 2 лгеца $\Rightarrow$ max 8 рыцарей.

7б

+

11.2. Заметим, что решения первого уравнения: $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$, а второго: $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b\cdot 4}}{2}$, т.к. корни есть (по усл-ию) $\Rightarrow D \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2-4b \ge 0 \\ a^2-4b\cdot 4 \ge 0 \end{cases}$

Также известно, что все корни целые $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\right) - \left(\frac{-a+\sqrt{a^2-4b\cdot 4}}{2}\right) \text{ - целое (разность целых)}$$

и

$$\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\right) \overset{?}{+} \left(\frac{-a-\sqrt{a^2-4b\cdot 4}}{2}\right) \text{ - целое (сумма целых)}$$

Итого:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a^2-4b}-\sqrt{a^2-4b\cdot 4}}{2} \in \mathbb{Z} \\ \left(\frac{\sqrt{a^2-4b} \oplus \sqrt{a^2-4b\cdot 4}}{2}\right) \in \mathbb{Z} \end{cases} ?$$

Это значит, что сумма этих 2 чисел и разность этих 2 чисел также целые:

сумма: $\sqrt{a^2-4b} \in \mathbb{Z}$

разность: $-\sqrt{a^2-4b\cdot 4} \in \mathbb{Z}$

Это означает, что $\begin{cases} \sqrt{a^2-4b} = m \\ \sqrt{a^2-4b\cdot 4} = n \end{cases}$ $m, n \in \mathbb{N}_0$ (натуральные с 0), т.к. корень из неотриц. числа - неотрицательное число.

$\Downarrow$

$\begin{cases} a^2-4b = m^2 \\ a^2-4b\cdot 4 = n^2 \end{cases} \Rightarrow 4 = m^2-n^2$

$\Downarrow$

m и n - одной четности

$\Downarrow$

$(m-n) \geq 2$, $(m+n) \geq 2$

т.к. $m \neq n$, $m, n \geq 0$, $m \geq n$

$\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=2 \end{cases}$

$\Downarrow$

$m=2$

$n=0$

$\Downarrow$

$0 = n = \sqrt{a^2-4b\cdot 4} \Rightarrow D_2$ (дискриминант 2го трёхчлена ур-ия)

$\Downarrow$

$D_3 = \sqrt{a^2-4b-8} < a^2-4b-4 = 0$

$\Downarrow$

$D_3 < 0 \Rightarrow$ 3ий трёхчлен не имеет корней

ЧТД.

±

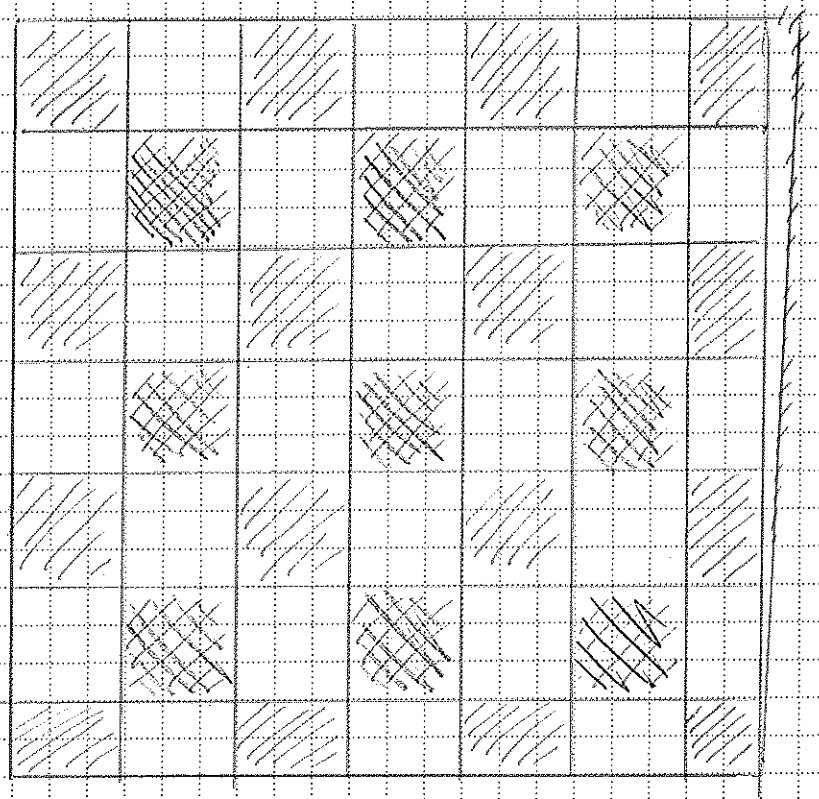
11.3 Ответ: 3025.

Пример:

- квадрат 30x30 кл. (кл. - клетка) заштрихованный

Замечание: Слово „отмеченный" подчёркнутое ═══ никак не связано с отмеченными клетками из условия. А вместо того, чтобы отмечать клетки, в решении выставляются короли.

Пример:



1 клетка = 5 настоящим. Заметим, что тут $10\times10 + 6\times10\times15 + 9\times15\times15 = 1000 + 2025 = 3025$ королей (кроме тем, где штриховка в 1 слой, ~~где есть~~ только ручкой)

Доказательство примера: внутри ~~из~~ одной области штриховки (квадрат или прямоугольник) — короли находятся на расстоянии ≤ 14*, а между разными областями расстояние хотя бы 16, т.к. хотя бы по одной координате (если ввести прямоугольную сист. координат с началом в левом нижнем углу) разница координат между ними хотя бы 16, а за ход она будет уменьшаться max на 1.

* если вектор, соедин. этих двух королей равен $\langle a, b \rangle$, то давайте король из начала вектора будет ходить на вектор

$\langle sign(a), sign(b)\rangle$, $\left(sign(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases} \right)$

(причём вектор между ними с каждым ходом изменя, т.е. мы будем смотреть $sign(a)$ и $sign(b)$ каждый раз у новых чисел. Например: $K \to K$ вектор между ними $\langle 2,1\rangle$ мы ходим $\langle 1,1\rangle$, вектор стал $\langle 1,0\rangle$ мы ходим $\langle 1,0\rangle$). Заметим, что тогда мы дойдём за $\max(|a|,|b|)$ ходов (т.к. каждый ход пока число $\neq 0$ его модуль уменьш. на 1)

Оценка: для всех квадратов из примеров (где стоит короли) 15×15

Оценка: для каждого короля из примера, стоящего в квадрате 15×15 отметим клетку на расстоянии 15 снизу, на расстоянии 15 справа и на расстоянии 15 по диагонали вправо-вниз:

Заметим, что из такой четверки можно выбрать max 1 короля (все попарно на расстоянии 15). Таким образом, из квадрата 90×90, который образуют все отмеченные клетки (заметим также, что никакие 2 четверки не пересек.), можно выбрать max $\frac{90\times 90}{4} = 45^2 = 2025$ королей.

Для всех королей из тонких прямоугольников 10×15 отметим клетку на расстоянии 15 справа, а для

всех королей в прямоугольниках 10×15 справа отмечены клетку на расстоянии 15 снизу. Из каждой пары можно выбрать max 1 короля, тогда из ~~100~~ 2×10×90 клеток можно выбрать max $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10\cdot 90 = 900$ королей

Разобьются на клетки по парам?

V – ~~отмечанные~~ к отмеченным добавим ~~на~~ короля из примера, т.е. получатся четверки отмеченных

(~~Всех~~ ~~отм~~ слово „отмеченных", выделенное ~~ст~~ ~~оз~~ (с пусть не относится к

И останется квадрат 10×10 = 100 клеток, итого ~~30~~ 2025 + 900 + 100 = 3025 королей max.

+

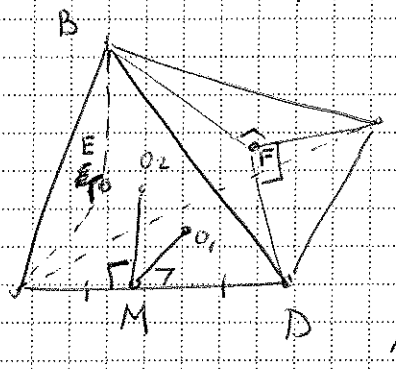
11.4. Заметим, что $P_n(x) = P_n(-x)$ для $n \geq 2018$, поэтому min корень многочлена – отрицателен. ~~P_n~~ ~~Пусть~~

Заметим, что $P_{n+1}(x) = x^2 P_n(x) + a_{n+1}$, где при $n \geq 2018$ a_{n+1} – min корень $P_n(x)$. Тогда $P_{n+1}(a_{n+1}) = a_{n+1}^2 \cdot P_n(a_{n+1}) + a_{n+1} = a_{n+1} < 0$. Заметим, что при достаточно больших x $P_{n+1}(x) > 0$ (т.к. это многочлен чётной степени, с коэф. 1 при старшем члене). Пусть x_0 такое, что $|x_0| > |a_{n+1}|$, и тогда $P_{n+1}(x_0) > 0$, тогда $P_{n+1}(-|x_0|) > 0$, ~~$P(a_{n+1})$~~ $P_{n+1}(a_{n+1}) < 0$, но т.к. $a_{n+1} = -|a_{n+1}|$ (оно отрицательно), значит по теореме о промежуточном значении на отрезке $[-|x_0|; -|a_{n+1}|]$ есть корень многочлена

$P_{n+1}(x)$, но этот корень меньше a_{n+1}, значит и min корень $P_{n+1}(x)$ меньше a_{n+1} (Всё выше сказанное рассматрив. при условии, что $n \geq 2018$). Тогда при $k \geq 2018$ $a_{k+1} < a_k$. Пусть $N = 2018$, тогда требуемое выполнено (Также важно, что среди a_i нет 0, из чего следует, что во всем выше сказанном строгие неравенства) +

11.5. Пусть O_1 – центр описанной окружности A, C, D, E.

O_2 – центр описанной окружности A, B, D, F.



1. Заметим, что плоскость, проход. через середину AD и $\perp AD$ – ГМТ точек, равноудал. от A и D => O_1 и $O_2 \in \alpha$. 6

2. Заметим, что $BE \perp$ любой прямой плоскости ACD => BE, в частности, $\perp AD$
$\Downarrow$
$BE \parallel \alpha$ в

3. Заметим, что $CF \perp$ любой прямой плоск. ABD => $CF \perp AD$
$\Downarrow$
$CF \parallel \alpha$ в

4. Т.к. расстояние от любой точки прямой до плоск. $\parallel$ этой прямой одинаково, то от B до α расстояние = от F до α
$\Downarrow$
Докажем, что B и F равноудалены от α.

5. ~~Рассмотрим ГМТ равноудал. от B и F – плоск.~~

6. Докажем, что если F – диаметрально противоп. B, то C – диам. противоп. E (тогда середина $BF = O_2$ – лежит ~~на~~ в α => B и F равноуд. от α) и докажем что в другом случае A, D, C, E – не циклические

7. $AB \perp AF$? Почему?
$\Downarrow$ по т. о 3 перпендик.
$AB \perp AC$ в
$\Downarrow$ по т. о 3 $\perp$
$AE \perp AC$
Аналогично
$DE \perp DC$
$\Downarrow$
C и E – диам. противоп.

~~8 Зафиксируем плоскость ADC. и окр~~

~~8 Давайте из каждой точки окружности ADC проведем перпендикуляр к плос. ADC.~~

~~8. Зафиксируем плоскость ACD (т. A, т. C, т. D), плоскость ABO_2 (т. A, т. D и т. O_2). Опустим из C перпендикуляр на ABO_2: т. F.~~

~~Я хочу д-ть, что если взять произв. т. окруж. ACD (E'), то восстановл. к плоск. ACD перп. через E'~~

~~8 Давайте из каждой т. окруж. ADC восстан. перп. к плоск. ADC. Получится прямой круговой цилиндр. Рассмотрим его пересеч. с плоск. ABO_2 – это эллипс.~~

Тогда если т. окруж. ADC совпалась т. E из условия, то её образ лежит на окруж. AFD. ~~Почему?~~ в точке B

Мы знаем, что таких т. min 3 – A, D, E, (E, – диам. противоп. C в окруж. ADC).

Также, у пересеч. эллипса с окруж. max 4 общих т. (по 5 зад. эллипс и окруж. => они совпад.)

Докажем, что их ровно 3 => E = E, и задача доказана. Пусть есть точка K, такая что K' ∈ ADE', тогда заметим, что если N – диам. противоп.

т. для K в окруж. ACD, ~~а~~ M - осн. перп. из N на плоск. ADO_2, то $K \in$ окруж. ADM, но тогда A, D, M, F - лежат на одной окружности, но это означает, что проекция окружности, ~~лежащ.~~ ~~в плоск. не II д. в.~~ на плоск. не || плоск. окруж. - окружность ~~б.~~ б.

11.6. Заметим, что среди этих чисел ровно 2 нечёт.
Возьмём эти 2 нечёт. числа и число между ними. Но три подряд идущих числа => их сумма ⋮ 3.
Из этих чисел 2 нечёт. и 1 чёт. => их сумма ⋮ 2
Тогда их сумма $= 2\cdot 3\cdot k$, где $k \geq 50$, т.к. сумма > 300 => 2, 3 и k – 3 различных нат. числа > 1.
ЧТД.

+

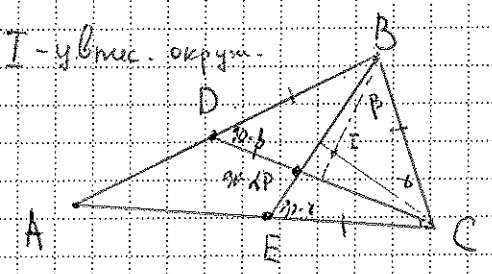
7б

11.7. Докажем, что:

$$x_n > x_{n+1}$$
$$\Updownarrow$$
$$2^n\left(a^{\frac{1}{2^n}}-1\right) > 2^{n+1}\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}}-1\right)$$
$$\Updownarrow \text{ обозначим } a^{\frac{1}{2^{n+1}}} \text{ за } b$$
$$b^2-1 > 2(b-1)$$
$$\Updownarrow$$
$$b^2-2b+1>0$$
$$\Updownarrow$$
$$(b-1)^2>0, \text{ что верно, т.к. } a^{\frac{1}{2^{n+1}}} \neq 1$$

+

11.8. I – центр впис. окруж.



1. $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, $\angle A = 2\alpha$

2. $\angle CBE = \angle CEB = 90^\circ - \gamma$ (из прям. Δ)
$\angle BDC = \angle BCD = 90^\circ - \beta$ (из прям. Δ)
$\Downarrow$
$\angle BPC = 180^\circ - \angle BCD - \angle CBE = \beta + \gamma = 90^\circ - \alpha$.

3. $\angle BPC$ – внешний для Δ BPD
$\angle BPC = \angle BDP + \angle DBP$
$\Downarrow$
$\angle DBP = \beta - \alpha$
Аналогично $\angle DCE = \gamma - \alpha$

4. $\angle DBI = \beta$, $\angle ECI = \gamma$ => I лежит внутри Δ BPC
$\angle DBP$ $\angle ECP$

5. BI – сер. пер к DC, ~~∠ABI = ∠CBI~~ ∠BCI = γ => ∠BDI = γ.
(т.к. BI – бисс. в реб △ BDC) (из симметрии относит. BI)

Аналогично ∠CEI = β

⇓

∠DIB = 180° − ∠BDI − ∠DBI = 180° − β − γ

~~∠CEI = 180° − γ~~

∠CIE = 180° − ∠CEI − ∠ECI = 180° − β − γ.

6. ~~∠DPI = 180° − ∠BDI − ∠PBDI = 180° −~~

∠DPB = 180° − ∠BDP − ∠DBP = 180° − 90° + β − (∠DBC − ∠EBC) =

= 90° + β − 2β + 90° − γ = 180° − β − γ

∠DPB = ∠EPC (вертикальные)

7. ∠DPB = 180° − β − γ = ∠DIB

⇓

I ∈ окруж. DPB

∠EPC = 180° − β − γ = ∠EIC

⇓

I ∈ окруж. EPC

=> I – вторая т. пересеч. BPD и CPE (отлична от P, т.к. внутри △ BPC)

11.9. Ответ: 28.

Докажем, что за k дней плавания может быть max k−2 ученика (походы в бассейн которых удовлетворяют условию) и приведём пример с помощью индукции по k (k ≥ 3)

Оценка: Т.к ~~всего~~ все ходили разное кол-во дней, при этом надо сходить хотя бы 1 день и не сходить хотя бы 1 день (иначе 2е усл-ие

Невыполнимо) Т.е. каждый ученик сходил в бассейн от 1 до $k-1$ раз. Пусть все эти кол-ва есть (т.е. всего $k-1$ ученик), тогда ~~ученик, который ходил 1 раз, должен был~~ все должны были ходить в бассейн в тот день, когда не ходил ученик с $k-1$ посещением, для выполн. 2-го усл-ия ~~,~~ в том числе ученик, ходивший только 1 раз. Но тогда для него (сходивш. 1 раз) и любого другого (сходивш. от 2 до $k-2$ раз) нет дня, когда один ходил, а второй - нет $\Rightarrow$ Max $k-2$ ученика.

Пример: База: $k=3$ *

ч. \ дни	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	1

(1 если ходил, 0 - нет)

$k=4$

ч. \ день	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	1	0

(слева - два учен., сверху - дни)

Переход: $k \to k+2$.

Пусть есть $k+2$ дня и k учеников.

Пусть 1-ый ученик ходил ~~в~~ только в ~~$k+1$~~ $(k+2)$-й день, 2-ой ученик ~~ходил~~ не ходил только в $(k+1)$-й и $(k+2)$-й день. А любой другой ходил в $(k+1)$-й и не ходил в $(k+2)$-й.

	1	2	3	...	k	$k+1$	$k+2$
1	0	0	0	...	0	0	1
2	1	1	1	...	1	0	0
3						1	0
⋮						⋮	
k						1	0

+

* По индукции докажем, что если есть $k+2$ дня нав. то можно дать такое расписание k ученикам, чтобы они посещали бассейн от 1 до k раз и при этом выполнялись все условия задачи.

Теперь у нас осталось заполнить расписание $(k-2)$ учеников на k дней, так чтобы выполн. у-ия задачи и они ходили от 1 до $k-2$ раз (т.к. ~~раз~~ есть учен. с 1 и k посещ., а у остальных уже 1 день занят), что можно сделать по предпол. индукции. Теперь осталось проверить, что все усл-ия выполн.:

1) ученики ходили от 1 до k раз

✓

2) для любых 2 есть такие дни, кот. необх. во 2ом усл-ии: ~~дни~~

• для учен. ~~3-k~~ № 3...k – есть по предп. индукции

✓

• для учен. №1 и любого/др. это $(k+2)^{й}$ день (№1 ходил №X не ходил) и любой день, когда №X ходил => №1 не ходил

✓

• для №2 и №X $(X \neq 1)$ $(k+1)^{й}$ день – №X был, №2 – нет; любой день, когда №X не ходил (из 1...k) –

- № 2 ходил, № X - нет.

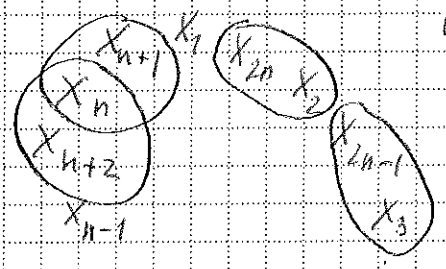
Все усл-ия выполн.; с базой $k=3$ 4 и шагом 2 мы можем дойти до любого числа, в том числе и до $k=30$ ЧТД.

11.10 Ответ: $\frac{1}{8n-8}$

Стратегия для Пети: пусть он выберет числа: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=0$, $x_3 \ldots x_{2n}=\frac{1}{4n-4}$. Сумма 1, все числа неотриц., заметим, что как бы Вася не ставил числа, $\frac{1}{2}$ окажется рядом хотя бы с одним числом $\frac{1}{4n-4}$ и их произв. $\frac{1}{8n-8}$ =>

=> $\max \geq \frac{1}{8n-8}$

Стратегия для Васи: пусть $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2n}$. Тогда он их расставит сл.д. образом:



Из каждой пары произв. с x_{n+i} $(i \geq 1)$ выберем max - они обведены (т.к. $x_{2n} \cdot x_2 \geq x_{2n-1} \cdot x_1$, поэтому мера $x_2 x_{2n}$ обв.)

Т.е. max произв. = $\max(x_{2n} \cdot x_2, x_{2n-1} \cdot x_3, \ldots x_{n+2} \cdot x_n)$ (мы отбросили $x_n \cdot x_{n+1} \leq x_n \cdot x_{n+2}$) или, если записать более кратко: max произв. = $\max(\{x_{n+j} \cdot x_{n+1-j}\})$ $1 \leq j \leq n-1$ (max из всех произв. такого вида)

Заметим, что: $x_{n+1-j} \cdot x_{n+1+j} \underset{(a)}{\leq} \frac{x_{n+1+j}(1-(n-j)\cdot x_{n+1+j})}{2j} \leq$

$\leq \frac{(n-j)\cdot x_{n+1+j}\,(1-(n-j)\cdot x_{n+1+j})}{(n-j)\cdot 2j} \underset{(b)}{\leq} \frac{1}{8j(n-j)} \underset{(c)}{\leq}$

$\underset{(c)}{\leq} \frac{1}{8(n-1)}$, а если все числа $\leq \frac{1}{8n-8}$, то и их $max \leq \frac{1}{8n-8} \Rightarrow max \leq \frac{1}{8n-8}$

a) $x_{n+1-j} \cdot 2j \leq x_{n+1-j} + \ldots + x_{n+j} \leq$

$\leq \underbrace{1-(x_{n+j+1}+\ldots+x_{2n}) \leq 1-(n-j)\cdot x_{n+1+j}}$,

$x_{n+1-j} \leq \frac{1-(n-j)\cdot x_{n+1+j}}{2j}$

b) Пусть $(n-j)\cdot x_{n+1+j} = a$, $1 \geq a \geq 0$ (т.к. $a \leq j(n-j)$)

$0 \leq a(1-a) = \left(\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-a\right)\right)\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\right) =$

$= \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-a\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

c) $0 \leq \frac{1}{j(n-j)} \leq \frac{1}{n-1}$

$n-1 \geq j \geq 1$

$j(n-j) \geq n-1$

$j(n-j) \geq n-1$

$n(j-1) \geq j^2-1 \Leftrightarrow (j-1)(n-j-1) \geq 0$ – в.кр.б.