ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА
(заполняется оргкомитетом)

9-43

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ
(ДД.ММ.ГГГГ.)
ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

01 . 02 . 2019

ВТОРОЙ ДЕНЬ

02 . 02 . 2019

ФАМИЛИЯ ДРУЖКОВ

ИНИЦИАЛЫ С . А .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО) 9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ 9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается): 14

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ
(заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	7	1	7	7	7	0	0	50

Председатель жюри: _____ /И.С. Рубанов/

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-43

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№9.б

Пусть это числа $k-1; k; k+1; k+2$

~~Рассмотрим такую~~ Пусть

k имеет вид $4n$, где $n \in N$

и рассмотрим сумму $(4n-1)+4n+(4n+1)=$

$=12n=3\cdot 4\cdot n$. Заметим, что $n \neq 4$ и $n \neq 3$,

т.к. в таких случаях $k=16<100$ и $k=12<100$

значит мы представили число в виде произведения 3 разн. чисел.

Если $k=4n+1$, то рассмотрим такую сумму $(4n+1)+((4n+1)+1)+((4n+1)+2)=$

$=12n+6=6(2n+1)=2\cdot 3(2n+1)$

Заметим, что $\underset{\text{нечет.}}{2n+1} \neq \underset{\text{четн}}{2}$ и $2n+1 \neq 3$

т.к. при $n=1$ $k=5<100$.

Если $k=4n+2$, то такая сумма

$((4n+2)-1)+(4n+2)+((4n+2)+1)=12n+6=$

$=2\cdot 3(2n+1)$ заметим что

$\underset{\text{нечет}}{2n+1} \neq \underset{\text{четн}}{2}$ и $2n+1 \neq 3$ т.к. при $n=1$ $k=6<100$

При $k=4n+3$ такая сумма

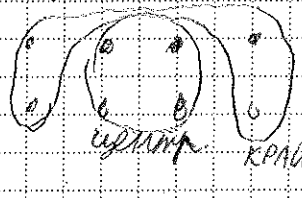
$(4n+3)+((4n+3)+1)+((4n+3)+2)=3\cdot 4(n+1)$

заметим, что $n+1 \neq 3$ т.к. в противном случае $n=2$ и $k=11<100$ и $n+1 \neq 4$ т.к. в обратном случае $n=3$ и $k=15<100$

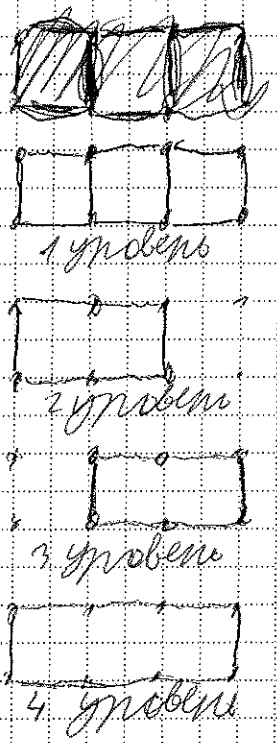
Мы рассмотрели все случаи и показали, что в каждом получится.

№ 9.7

Построим пример. Отметим вот так 8 точек. Будем его строить по уровнево, на 1 уровне будут такие прямоугольники (квадратики 2×2)



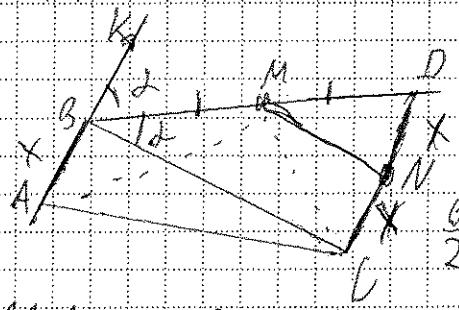
На 2 и 3 уровне прямоугольники 2×4.



А на 4 уровне 1 прямоугольник 2×6

Затем сложим вместе эти ~~уровни~~ уровни на полных 8 вершинах и получится, что центральные вершины оказываются в двух 2×2 и одном 2×4 прямоугольнике, а крайние по разу в 2×2, 2×4, 2×6 прямоугольниках. То есть каждая из прямоугольников и никакие два прямоугольника не совпадают по 4 вершинам.

№ 9.8



N - середина CD, а т.к. $CD = 2AB$, то $CN = ND = AB = x$

M - середина BD, то $\frac{BD}{2} = BM = MD$, а значит

MN - средняя линия треугольника BCD $\Rightarrow MN \parallel BC$ и $MN = \frac{1}{2}BC$.

Т.к. BD - внешняя биссектриса $\angle B$, то

$\angle KBD = \angle DBC = \alpha$ и $\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - \angle KBD - \angle DBC =$

$= 180^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ABM = \angle ABC + \angle CBM = 180^\circ - \alpha$

$\underbrace{\angle MCN}_{\angle MNC} = 180^\circ - \underbrace{\angle BCD}_{180-2\alpha} = 120^\circ$ т.к. $MN \parallel BC$

Тогда нам нужно, что

$AM = MC$, то докажем, что $AM^2 = MC^2$

По теореме косинусов для $\triangle ABM$ и $\triangle MNC$

$x^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{BD}{2} \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = AM^2 = MC^2 =$

$= x^2 + MN^2 - 2x \cdot MN \cdot \cos(120^\circ) = x^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2x \cdot \frac{BC}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$BD^2 + 4x BD \cdot \cos\alpha = BC^2 + 2x \cdot BC$

По теореме косинусов для $\triangle BDC$

$BD^2 = BC^2 + 4x^2 - 2 \cdot BC \cdot 2x \cdot \cos(180) = BC^2 + 4x^2 - 2BCx$

Подставим вместо BD^2

$4x^2 - 2BCx + 4x BD \cdot \cos\alpha = 2x \cdot BC$

$2x - BC + 2BD \cdot \cos\alpha = 1 \cdot BC$

$2x + 2BD \cdot \cos\alpha = 2BC$

№9.8 (продолжение)

По теореме синусов для $\triangle BOC$

$$\frac{2x}{\sin\alpha} = \frac{BO}{\sin(60)} \Rightarrow BO = \frac{2x \cdot \sin 60}{\sin\alpha}$$

$$\frac{2x}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(60+\alpha)} \Rightarrow BC = \frac{2x \cdot \sin(60+\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Подставим

$$2x + \frac{2 \cdot 2x \cdot \sin(60)}{\sin\alpha} \cos\alpha = 3 \cdot \frac{2x \sin(60+\alpha)}{\sin\alpha} \quad | \cdot 2x \cdot \sin\alpha$$

$$\sin\alpha + 2 \cdot \sin(60) \cos\alpha = 3 \cdot \sin(60+\alpha)$$

$$\sin\alpha + \sqrt{3} \cdot \cos\alpha = 3 \cdot (\sin 60^\circ \cos\alpha + \cos(60^\circ) \sin\alpha)$$

$$\sin\alpha + \sqrt{3} \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin\alpha$$

ч.т.д.

Мы доказали равенство квадратов отрезков, значит сами отрезки равны ($AM = MC$), а значит $\triangle AMC$ - равносторонний.

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-43

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 9.9

~~Этап Будем рассм~~

Будем рассматривать триангуляции нашего n-угольника подходящие под условие. Заметим, что при любой триангуляции образуется треугольник с двумя сторонами, являющимися сторонами исходного n-угольника*. ~~Значит~~ Рассмотрим этот треугольник. Его вершина соединяющая две стороны исходного треугольника, может быть покрашена в два цвета т.к. из неё не выходят диагонали, будем называть ~~вершины~~ эту вершину серой ~~цвета~~. Давайте уберем этот треугольник (2 стороны исходного n-угольника) и получим правильно раскрашенный n-1-угольник у которого есть две ~~...~~ соседние разноцветные вершины

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-43

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№9 (продолжение)

Т.е. мы отобразили множество правильных раскрасок n-угольника с серой вершиной, на множество раскрасок n-1 угольника с двумя последовательными разноцветными вершинами.

Заметим, что каждый элемент множества ~~такого~~ ~~от~~ правильных раскрасок n-1 угольника с соседними разноцветными вершинами можно отобразить в множество n-угольников с правильной раскраской и серой вершиной. Значит они совпадают. Об

Заметим, что в любой хорошо раскрашенной n-1 угольнике есть две соседние разноцветные вершины, пусть нет, тогда они все одноцветные, а тогда т.к. $n \geq 4$, должны быть двойками, а они должны быть разноцветными.

№9.4 (продолжение продолжения)

Тогда пусть $S(n)$ - кол-во правильных раскрасок n-угольника, т.к. серая вершина может быть любого из двух цветов, то кол-во раскрасок с серой вершиной $\frac{S(n)}{2}$, а это равно кол-ву правильных раскрасок $n-1$ угольника тогда $S(n)=2S(n-1)$

Но при доказательстве этого равенства мы пользовались тем, что считали, что все вершины различны, что не так, а т.к. вершин n, то $S(n)=2nS(n-1)$, а $S(4)$, можно посчитать оно равно 2.

А общая формула равна

$$S(n)=\frac{2^n\cdot n!}{2^3\cdot 4!}=A_n^{n-4}\cdot 2^{n+1-4}$$

Всего раскрасок 2^n < ответ

~~№ 9.10~~

~~Заметим, что все числа не могут быть отрицательными, т.к. их сумма 1. Значит там есть положительные. Т.к. оно нужно наименьшее число, то он будет стараться ставить в пару отр и пол~~

№ 9.10

Ответ: $\frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10000}$

Петя скатет все числа одинаковые и равны $\frac{1}{100}$, Вове ничего не останется кроме как их перемножить.

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-43

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 9.1

Пусть $f(x)=x^2+ax+b$ и $g(x)=x^2+cx+d$

тогда $f(1)=g(2)$ будет выглядеть

$1+a+b=4+2c+d$, а $f(2)=g(1)$

$4+2a+b=1+c+d$, вычтем одно

из другого $f(2)-f(1)=g(1)-g(2)$

$3+a=-3-c \Leftrightarrow 6=-(a+c)$

По теореме Виета сумма

корней трехчлена x^2+ax+b

равна $-\frac{a}{1}=-a$, а сумма

корней ~~многочлена~~ трехчлена

x^2+cx+b равна $-c$, тогда

сумма четырёх корней

$-a+(-c)=-(a+c)=6$

Мы могли использовать

теорему Виета т.к. в условии

сказано, что по два корня

есть у каждого трехчлена.

№9.2

Пусть там будет 9 или больше рыцарей, тогда по Принципу Дирихле хотя бы один скажет „мое число больше 9" или „моё число больше 10". Тогда число этого рыцаря минимум 10, ведь числа у нас целые. Заметим, что во второй раз он соврёт ~~т.к.~~ т.к. максимальное число меньше которого его число это число 10. Противоречие а значит рыцарей не больше 8.

Пример на 8

Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Р	Л	Л	
2	3	4	5	6	7	8	9	5	6	число
>1	>2	>3	>4	>5	>6	>7	>8	>9	>10	1 выск.
<3	<4	<5	<6	<7	<8	<9	<10	<1	<2	2 выск.

Р - рыцарь Л - лжец.

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-43

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№93

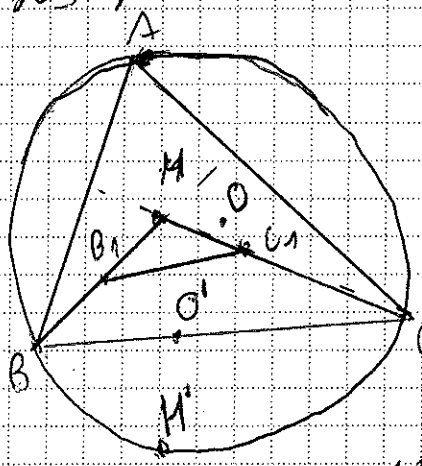
Найдём наибольшее число, оно одно т.к. числа разные, и начиная с него пронумеруем все числа от 1 до 100. Пусть наименьшее число, оно одно т.к. все числа разные, имеет номер n.

Рассмотрим деление $a_{100} \vdots a_1$ т.к. a_1 наиб., то есть $a_1 > a_{100}$, то остаток будет a_{100}, это один из двух остатков. Рассмотрим деление $a_{n-1} \vdots a_n$ т.к. a_n - наименьшее и ~~тогда~~ т.к. остаток меньше делителя, то остаток $K < a_n \leq a_{100}$ т.к. a_n - наименьшее, а значит мы нашли второй остаток. Заметим, что числа идут в порядке убывания от самого большого до самого маленького. Пусть это не так, тогда есть $a_m < a_{m+1}$ и $a_m \vdots a_{m+1} = 0$ (ост a_m) т.к. числа различные то $a_m \neq a_{100}$ и $a_m > a_n > K$, значит такого быть не могло или a_m последнее число и других таких нет. Тогда они упорядочены по убыванию. Найдем в обратном порядке то т.к. $a_m > a_{m+1}$, то $a_{m+1} \vdots a_m = 0$ (ост a_m) а $a_i \neq a_i$ если $1 \neq i$, то они все различны а $a_1 \vdots a_{100}$ имеет остаток 1, но т.к. a_{100} наименьшее, то $1 < a_{100} \leq a_i$, то есть тоже не равно.

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-43

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№9.4



H - ортоцентр $\triangle ABC$

O - центр. опис. окр. $\triangle ABC$

O' - центр опис. окр $\triangle B_1HC_1$

Отразим H, O, O' отн. BC $H \to H'$ по свойству ортоцентра она будет лежать на опис. окр. $\triangle ABC$

$O' \to O''$ и $O' \to O'$ т.к. лежит на BC (по условию)

$HO' \to H'O'' \Rightarrow HO' = H'O''$ значит H' лежит на опис. окр $\triangle B_1HC_1$. Чтобы доказать, что H' точка касания, а не пересечения, надо показать, что она лежит на линии центров, то есть $H'O'O$ - прямая или $H'O''O''$ одна прямая т.к. $H \to H'$ $O' \to O''$ и $O \to O''$ при симметрии относительно BC

$\angle BHO' = 90^\circ - \frac{\angle B_1O'H}{2}$ т.к. $B_1O' = O'H$ т.к. O' центр опис. окр $\triangle B_1HC_1$, а

$\angle B_1O'H = 2\angle B_1C_1H$ т.к. они опираются (центр.) (впис.) на одну дугу.

$\angle BHO' = 90^\circ - \angle B_1C_1H = 90^\circ - \angle BCH$ т.к. $B_1C_1 \parallel BC$

$90^\circ - \angle BCH = 90^\circ - (90^\circ - \angle B) = \angle B = \angle BHO'$

$\angle BCH = 180^\circ - 90^\circ - \angle B = 90^\circ - \angle B$ т.к. CH - высота

$\angle ABH = \angle OBC$ т.к. ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены

$\angle ABH = 180^\circ - 90^\circ - \angle A = 90^\circ - \angle A$ т.к. AH - высота.

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-43

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 9 (продолжение)

$\angle HBC = 180^\circ - 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle C$
т.к. BH - высота.

$\angle OBC = \angle O''BC$ т.к. при симметрии отн. BC $B \to B$, $C \to C$, а $O \to O''$

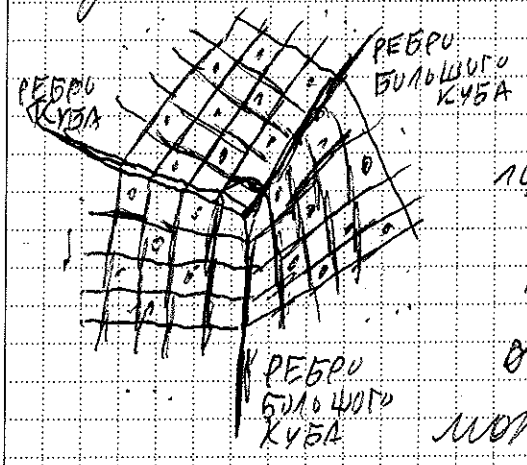
Тогда ~~уж~~ $\angle HBO'' = \angle HBC + \angle O''BC =$
$= \angle HBC + \angle OBC = \angle HBC + \angle ABH = \angle B$

Заметим т.к. H' лежит на опис. окр. $\triangle ABC$, то $OH' = OB$
при симметрии относительно BC
$O'' \to O''$, $H' \to H$, $O \to O''$ и $B \to B$, тогда
$O''H = O''B \Rightarrow \angle HBO'' = \angle BHO'' = \angle B =$
$\angle BHO' \Rightarrow$ ~~то~~ H, O' и O'' лежат на одной прямой, а значит и H', O' и O, что и требовалось доказать, что точка касания лежит на линии центров

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

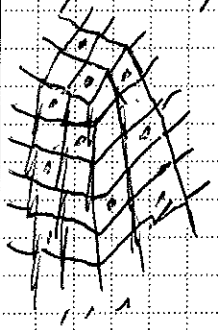
№ 9,5

Давайте выделим на какой-то грани центральный квадрат 998 × 998. И закрасим его в шахматном порядке и продолжим красить вбок и другие грани на трогая угловые клетки. Пок раскраски



Всего сейчас мы отметили 1000^2 $\frac{1000^2 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 1000 + 11}{2}$ у нас не покрашены боковые столбики. Их можно считать одинаковыми т.к. противоположные симметричны, а если кубик перевернуть вверх ногами, то оставшиеся 2 столбца совпадут.

Пример раскраски столбика,



На котором будет покрашено $\frac{1000}{2} + 1 = 501$ клеточка тогда ~~всего~~ всего покрашены клеточек. $\frac{1000^2 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 1000 + 11}{2} + 4 \cdot 501 =$

$= 1000^2 \cdot 3 - 4 \cdot 1500 + 11 = 2998000$, а в общем виде для $n \times n \times n$ $n^2 \cdot 3 - 2n = n(3n - 2)$