

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА
(заполняется оргкомитетом)

10-02

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ

(ДД.ММ.ГГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

05 . 02 . 2021

ВТОРОЙ ДЕНЬ

06 . 02 . 2021

ФАМИЛИЯ ХИТРИН

ИНИЦИАЛЫ Г . И .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО) 10

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ 10

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается):

11

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	7	0	7	7	7	7	0	56

Председатель жюри:

И.С. Рубанов

/И.С. Рубанов/

предмет **МАТЕМАТИКА** класс **10** шифр **10-02**

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N1

Пусть длины палочек равны $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6$ и

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6$$

Рассмотрим треугольник, в котором была палочка a_1 .

Пусть в нём длины сторон a_1, a_2 и a_3 . Заметим, что $a_2 + a_3 > a_1 \Rightarrow a_2 + a_3 > a_1$. Кроме того, понятно, что $a_1 + a_2 > a_3$ и $a_1 + a_3 > a_2$. Значит, из палочек первой группы можно составить треугольник.

Из палочек второй группы не обязательно можно составить треугольник.

Пример: 5, 9; 5, 5; 5, 4; 2; 1 — длины палочек в метрах. Изначально могли быть треугольники со сторонами 1, 5; 5, 9 и 2; 4; 5, 5. Неравенство в треугольнике выполняется. Но из палочек 4; 2; 1 нельзя составить треугольник, так как $1 + 2 < 4$.

N2

$$\cancel{y^4 - x^4 < y^4} \Rightarrow y^4 - x^4 > y \Rightarrow x^4 < y^4 - y \Rightarrow x^4 - y^4 < -y \Rightarrow \Rightarrow -y > x$$

$$x^4 - y^4 > x \Rightarrow y^4 < x^4 - x \Rightarrow y^4 - x^4 < -x \Rightarrow -x > y$$

Д. Предположим, что $xy < 0$. Тогда одно из чисел положительно, а другое отрицательно. Пусть $x > 0, y < 0$ (другой случай аналогичен, так как если поменять местами x и y , то условие не изменится).

предмет МАТЕМАТИКА

класс

10

шифр

10-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$-y > x$, $x > 0$ и $y < 0 \Rightarrow |y| > |x| \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^4 - y^4 < 0$, но тогда $x^4 - y^4 < x$. Противоречие
 с условием.

Значит, xy не может быть отрицательным

№3

Пусть множество S конечно. Пусть ~~максимальная~~
~~степень~~ Рассмотрим число из S , которое делит-
 ся на максимальную степень тройки (то есть в S
 нет числа, делящегося на большую степень тройки).

Пусть эта степень равна n .

Рассмотрим какое-нибудь число a_1 из S . Тогда

$15a_1 = a_2(3a_3 - 5)$. Заметим, что $3a_3 - 5$ ^{взаимно}
 просто с 3 $\Rightarrow a_2 \div 3$

$15a_2 = a_4(3a_5 - 5)$. $15a_2 \div 9$, $3a_5 - 5$ ^{взаимно} просто с
 3 $\Rightarrow a_4 \div 3^2$

Таким образом, представив какое-то число a_1 из S
 в виде $15a_1 = a_i(3a_i - 5)$, можно утверждать, что
 a_i делится на 3^{d+1} , где d - максимальная степень

тройки, на которую делится a_1 . Далее число a_i
 можно тоже представить в виде $15a_i = a_{i+1}(3a_{i+1} - 5)$

Число a_{i+1} делится на 3^{d+2} . Будем представлять

числа вида a_{i+k} в виде $15a_{i+k} = a_{i+k+1}(3a_{i+k+1} - 5)$

до тех пор, пока максимальная степень тройки,

предмет **МАТЕМАТИКА**

класс **10**

шифр

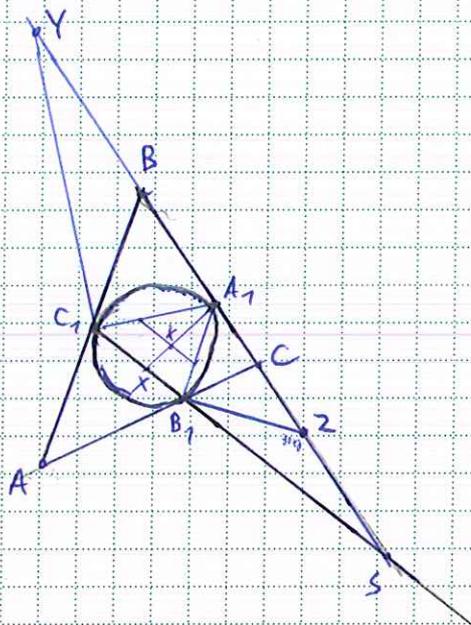
10-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

на которую делится a_{i+1} , не превосчит n (это произойдет, так как максимальная степень тройки, на которую делится число вида a_i , после каждого представления увеличивается хотя бы на 1). Но мы предположили, что нет числа ($v \in S$), которое 3^n делится на 3^{n+1} . Противоречие.

Значит, множество S бесконечно

№4



1. Проведем касательную с центром в точке A_1 и коэффициентом 2. Прямая t перейдет в C_1B_1 , $k - v_X$, $v - v_Y$, $c - v_Z$. $v_Y = v_{A_1} = v_{C_1}$ (т.к. v_{C_1} и v_{A_1} - касательные). $A_1C = C_1B_1 = cZ$ (v_{B_1} и v_{A_1} - касательные). Тогда описанная окружность Δv_KC перейдет в описанную окружность ΔYXZ .

2. Достаточно доказать, что v_1C_1 - касательная к описанной окружности ΔYXZ . Для этого доста-

предмет МАТЕМАТИКА

класс 10

шифр

10-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

можно доказать, что $SX^2 = SZ \cdot SY$ (S — точка пересечения BC и B_1C_1 , треугольник неравносторонний)

$$3. \left. \begin{array}{l} \angle ABC = 2\beta, \angle ACB = 2\gamma \\ \angle BAC = 2\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A_1B_1C_1 = 90^\circ - \gamma, \\ \angle C_1B_1A_1 = \alpha + \gamma,$$

$$\angle C_1B_1Y = 180^\circ - 2\beta \Rightarrow \angle C_1YA_1 = \beta, \text{ т.к. } C_1B_1 = B_1Y.$$

$$4. \angle A_1B_1Z = 90^\circ, \text{ т.к. } A_1C_1 = CB_1 = CZ$$

$$5. \left. \begin{array}{l} \angle C_1B_1Z = 90^\circ + \alpha + \gamma \\ \angle C_1YZ = \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \angle C_1B_1Z + \angle C_1YZ = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1YZB_1 - \text{вписанный.} \Rightarrow SZ \cdot SY = SB_1 \cdot SC_1$$

6. Заметим, что SA_1 — касательная к вписанной окружности $\triangle ABC \Rightarrow SA_1^2 = SB_1 \cdot SC_1$

$$7. \angle C_1A_1B_1 = \beta + \gamma \Rightarrow \angle XA_1B_1 = \frac{\beta + \gamma}{2}, \text{ т.к. } A_1X - \text{дуга - сектриса } \angle C_1A_1B_1 \Rightarrow \angle XA_1S = 90^\circ - \gamma + \frac{\beta + \gamma}{2} =$$

$$= 90^\circ + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

$$8. \angle A_1B_1S = 180^\circ - (\alpha + \gamma), \angle B_1A_1S = 90^\circ - \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle B_1SA_1 = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \gamma + 90^\circ - \gamma) = 2\gamma + \alpha - 90^\circ =$$

$$= 2\gamma + \alpha - (\alpha + \beta + \gamma) = \gamma - \beta$$

$$9. \text{ Из 7 и 8 пунктов следует, что } \angle A_1XS = 90^\circ + \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A_1XS = \angle XA_1S \Rightarrow A_1S = SX$$

$$10. \text{ Из 9 и 10 пунктов получаем, что } SX^2 = SB_1 \cdot SC_1$$

Подставляя это в 5 пункт, получим, что $SX^2 = SZ \cdot SY$, что и требовалось (по пункту 2).

предмет МАТЕМАТИКА

класс

шифр

10-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№5

Ответ: Нет.

~~Пусть Тетя первым своим ходом перекрашивает одну из главных диагоналей.~~

Раскрасим доску в шахматную раскраску в красный и синий цвета. Тогда можно считать, что Тетя и Вася перекрашивают красные и синие клетки в чёрный цвет. Условно красных и синих клеток поровну.

Пусть Тетя первым своим ходом перекрашивает синюю главную диагональ. Тогда разница между синими и красными клетками равна 100.

~~Всего в таблице 99 синих диагоналей, параллельных главной синей диагонали.~~

Заметим, что Вася может перекрасить n красных и n синих или n красных и $n-1$ синих или n красных и $n+1$ синих.

Пусть Тетя после первого хода всегда перекрашивает по одной синей клетке до того момента, пока они не закончатся. Заметим, что после этого на доске

Останется хотя бы 100 красных клеток? Кроме того, заметим, что после этого Вася может перекрашивать по одной клетке. ~~Если после истребления синих клеток~~ ~~Тетя~~ ~~первым своим ходом~~ ~~после истребления синих клеток~~ Тетя может сделать так, чтобы кол-во красных клеток было чётным, а затем закрасить по одной клетке. Тогда он победит? дак - во?

предмет **МАТЕМАТИКА** класс **10** шифр **10-02**

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№6

Предположим, что последние цифры чисел a и b нечётные. Тогда последняя цифра числа $a+b$ — чётная. Таким образом, все цифры на доске не могут быть нечётными.

В числе $a+b$ не более 11 цифр (т.к. сумма двух десятизначных чисел, состоящих только из 9, является 11-значным числом). Тогда на доске не более $70+10+11=31$ цифр \Rightarrow не более 30 нечётных цифр.

Пример: $a = b = 9999999999$

$a+b = 19999999998$

Ответ: 30

№7

Посмотрим на положение числа 1. В одной из соседних клеток с ним стоит число 4. Тогда 7 стоит в одной из соседних с 4 клеток. Такие рассуждения можно продолжать для всех чисел, дающих остаток 1 при делении на 3. Таким образом, если встать в клетку с 1, то можно пройти по маршруту $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow \dots \rightarrow 79$, переходя в соседние по стороне клетки.

Аналогично можно показать, что есть маршруты $2 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow \dots \rightarrow 80$ и $3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow \dots \rightarrow 81$.

Покрасим таблицу в шахматную раскраску (4-5)

7

предмет **МАТЕМАТИКА** класс **10** шифр **10-02**

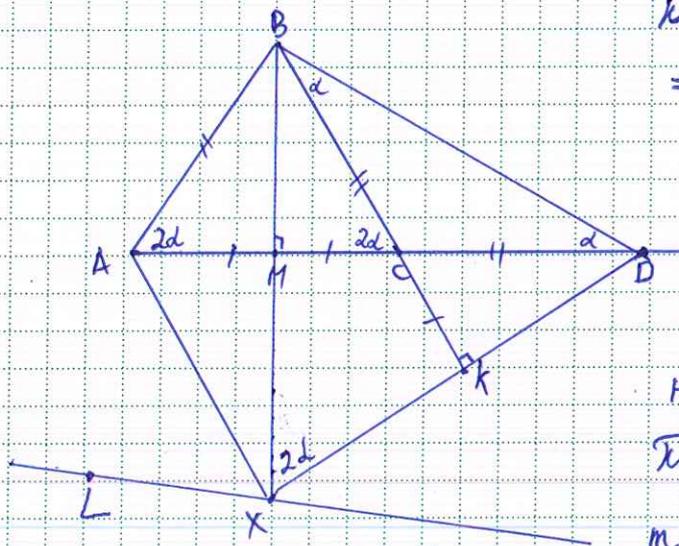
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

так, чтобы угловые клетки были черными. Заметим, что, если мы будем идти по указанной маршрутам, то каждое число будет отличаться по цвету от предыдущего. Кроме того, разность чисел, стоящих на черных клетках одного маршрута, ~~равна~~ делится на 6 (так как все числа в одной маршруте имеют одинаковый остаток при делении на 3, а числа на черных клетках ~~одного~~ маршрута еще и одинаковый остаток при делении на 2).

Все угловые клетки таблицы черные, маршрутов всего 3. Тогда в каком-то маршруте найдутся два числа, стоящие на черных угловых клетках, а мы выясним, что их разность кратна 6.

Обязательно найдутся две угловые клетки, разность которых чисел в которых делится на 6.

№ 8



Пусть $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BCD = 780^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle CBD = \angle BDC = \alpha,$$

Заметим, что $\triangle MCB = \triangle KCD$ по двум сторонам и углу между ними.

Тогда $\angle CKD = \angle BMC = 90^\circ$,

т.к. $\triangle ABC$ — равнобедренный,
 $MB = KD$

предмет МАТЕМАТИКА

класс 10

шифр

10-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Пусть BM и DK пересекаются в X . Тогда $MХК$ - вписанный, т.к. $\angle XMC + \angle CKX = 180^\circ$, и $\angle MXK = 2\alpha$. ($2\alpha \neq 180^\circ \neq 0^\circ \Rightarrow X$ существует). Получается, что $\angle BAD = \angle BXD \Rightarrow BAXD$ - вписанный. Значит, X лежит на описанной окружности $\triangle MCK$ и на описанной окружности $\triangle ABD$. ~~Осталось~~

Проведём касательную XL к описанной окружности $\triangle MCK$. Достаточно доказать, что XL - касательная к описанной окружности $\triangle ABD$, тогда оп. окр.

треугольников $\triangle MCK$ и $\triangle ABD$ касаются.

$\angle XBD = \angle BDX \Rightarrow BX = DX \Rightarrow \triangle MX = XK, \triangle MCK \sim \triangle KDC \Rightarrow \angle XCM = \angle XCK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle XMK = \angle XKM = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle LXV = \angle XKM = 90^\circ - \alpha$

$\angle CDK = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle KDB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle KDB = \angle LXV \Rightarrow$

$\Rightarrow LX$ - касательная к оп. окр. $\triangle ABD$, что мы и хотим

~~МНГ~~

Ответ: три всех $n \geq 3$

Пусть фокусник открывает первую слева карточку I . Если на этой карточке число 1.

Пусть фокусник и помощник заранее нарисуют себе следующие ряды:

1, 2, 3, ..., n

1, 3, 4, ..., $n, 2$

предмет **МАТЕМАТИКА** класс **10** шифр **10-02**

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

1, 4, 5, ..., $n-2$, 3

1, n , 2, 3, ..., $n-1$ (всего $n-1$ рядов)

~~Заметим, что, когда зритель открывает вторую карточку, фокусник по данным ряду Пучок помощник по положению карточки с 2 расставит остальные карточки так, чтобы получился один из данных рядов (такой ряд равно один). Тогда, после того, как зритель открывает вторую карточку, фокусник сможет обнаружить карточку с 2 по данным ряду.~~

II. Если на открытой фокусником карточке написано 2, то можно действовать аналогично пункту I, но во всех рядах 1 и 2 меняются местами

(Помощник видит, куда зритель положил карточки, и, если одна из карточек оказалась на первом слева месте, то он действует так, как написано выше).

III. Теперь предположим, что ни одна из карточек с 1 и 2 не оказалась на первом слева месте.

Пусть фокусник и помощник заранее построит несколько рядов следующим образом:

Для всех k ($3 \leq k \leq n$) делаем $n-1$ ряд по правилу:
(назовем это группой).
Сначала строим ряд $k, 1, k-3$ различных числа, не

предмет **МАТЕМАТИКА** класс **10** шифр **10-02**

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

совпадающих ни с какими из уже написанных», 2, «оставшиеся числа».

Далее строим $n-2$ ряда так: берём предыдущий построенный ряд, в нём рассматриваем числа со второй до последней позиции (они образуют «рядок»). В этом «рядке» сдвигаем числа на одну позицию вправо (то есть первое стало вторым, второе — третьим, ..., последнее — первым).

Построив такие ряды для всех k , получим $(n-2) \cdot (n-1)$ рядов.

Заметим, что в таких рядах карточки с 1 и 2 принимают всевозможные положения (т.к. ни одна из них не является первой слева). Тогда фокусник, зная положения карточек с 1 и 2, расставляет остальные карточки в соответствии с одним (ровно одним) из рядов.

Фокусник, открывая первую слева карточку, определяет группу рядов, и по любой открытой зрителю карточке определяет ряд и, соответственно, положения карточек с 1 и 2.

№10

Ответ: Да, можно

Пусть $n=101$. Заметим, что существуют $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$ идущих подряд составных чисел. Эти 5050 образуют арифметическую прогрессию с раз-

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА класс 10 шифр 10-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

ностью 1. Каждое из этих чисел является наименьшим общим кратным каких-то двух натуральных чисел, каждое из которых больше 1. и что?

Рассмотрим два наибольших числа, записанных в тетрадь (m и k). Их