

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА
(заполняется оргкомитетом)

10-15

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ
(ДД.ММ.ГГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

05 . 02 . 2021

ВТОРОЙ ДЕНЬ

06 . 02 . 2021

ФАМИЛИЯ ШУЛЯТЬЕВ

ИНИЦИАЛЫ А . А .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО) 10

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ 10

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня,
титульный лист не считается):

10

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	0	-	7	7	7	-	-	42

Председатель жюри: И.С. Рубанов /И.С. Рубанов/

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 10

шифр 10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

✓ 10.1] одним Δ может быть либо 2 длинные стороны и 1 короткая ($2D_1, 1K$), либо 3 D_1 , а в второго тогда будет $\exists K$ или $2K$ и 1 D_1 (оставшиеся стороны одинаковы)

1 Δ 2-й Δ

I $\left[\begin{array}{cc} D_1, D_2, D_3 & K_1, K_2, K_3 \end{array} \right]$ - уже составлены

II $\left[\begin{array}{cc} D_1, D_2, K_3 & K_1, K_2, D_3 \end{array} \right]$

$$D_1 < D_2 + K_3 \text{ по нер-ву } \Delta$$

$$D_1 < D_2 + D_3 \quad (D_3 \geq K_3)$$

$$D_2 < D_1 + D_3 \text{ аналогично}$$

$$D_3 < K_1 + K_2 \text{ по нер-ву } \Delta$$

$$D_3 < D_1 + D_2$$

$$D_1 < D_2 + D_3$$

$$D_2 < D_1 + D_3$$

$$D_3 < D_1 + D_2$$

из данных палочек Δ можно будет составить всегда

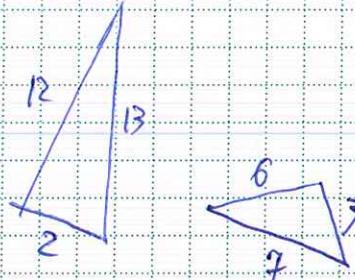
Ответ: Из первой группы - да, из второй группы - нет.

✓ 10.2 М от π , пусть может.

Если $x, y < 0$, тогда одна из чисел x или $y < 0$, а другое > 0

Пусть $y < 0$, тогда x ~~и~~ должно быть > 0

с короткими палочками всегда составить Δ не получится, например есть такой случай:



Короткие палочки это 2, 3 и 6
 $2 + 3 < 6 \Rightarrow$ по нер-ву Δ составить его не удастся

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 10

шифр 10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$$\begin{cases} x^4 - y^4 > x \\ y^4 - x^4 > y \\ x^4 - y^4 > x \\ + y^4 - x^4 > y \end{cases}$$

$$0 > x + y \Rightarrow |y| > |x| \quad (y < 0, x > 0)$$

$$|x|^4 - |y|^4 < 0$$

$$x^4 - y^4 < 0 \Rightarrow x < x^4 - y^4 < 0$$

$$x < 0, \text{ а значит } |x| > |y|$$

Из то по предположению $x > 0 - y < 0 \Rightarrow xy$ не может быть отрицательным (если же предположить, что $x < 0$, а $y > 0$, то все это рассуждения останутся аналогичны т.к. если в неравенствах поменять x и y местами, то они останутся справедливыми все)

Ответ: Не может.

$\sqrt{3}$

$$a = \frac{6(3c-5)}{15}$$

$$15a = 6(3c-5)$$

$$15a : 3 \quad \frac{3c-5}{3} \cdot \frac{3}{3} \Rightarrow 3c-5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$a_k = 3^{q_1} \cdot 4^{e_1} \cdot 4^{e_2} \cdot \dots \cdot 4^{e_n} \Rightarrow \frac{15a_k}{3} = \frac{6_{k_1}}{3^{q+1}} \cdot \frac{(3c_{k_1}-5)}{3} \cdot a \text{ число}$$

b_{k_1} тоже входит в \mathbb{Z} и его тоже можно представить как $15b_{k_1} = 6_{k_2} (3c_{k_2} - 5) \Rightarrow$ аналогично с $b_{k_1}, b_{k_2}, 3^{q+2}$, то есть, если множество конечно, то найдется в нем a_{k_1} также, что

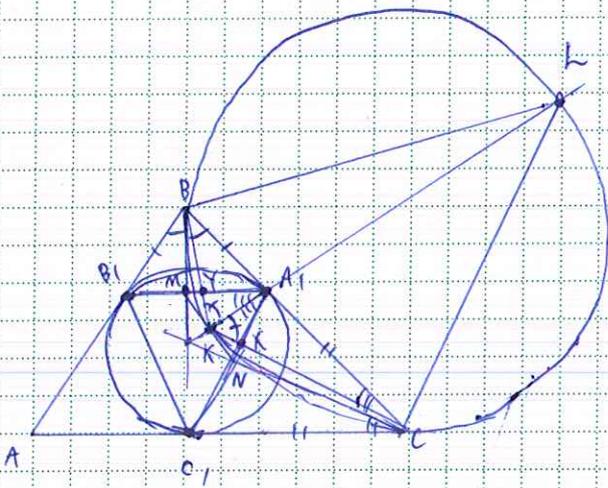
предмет математика

класс 10

шифр 10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$a_n = 3^{\alpha_n} \cdot f_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot f_n^{\beta_n}$ где q - самая большая степень 3 из
всего S , но тогда чтобы выполнялось равенство
 $15a_n = b_n(3c_n - 5)$, должно в S существовать и число
 $b_n \vdots 3^{q+1}$ т.к. $3c_n - 5 \not\vdots 3$, а $15 \vdots 3 \Rightarrow q$ не была самой
большой степенью 3 в $S \Rightarrow q$ и S - бесконечно \blacktriangle
и q



Дано: h_1 - высота в $\triangle ABC$

$$h_1 \cap AB = C_1$$

$$h_1 \cap BC = A_1$$

$$h_1 \cap AC = B_1$$

m - сред. линия $\triangle A_1 B_1 C_1$

$$m \parallel B_1 C_1$$

$$A_1 K \perp \text{жисс. } \angle B_1 A_1 C_1$$

$$A_1 K \cap m = K$$

Док-во: h_{BCK} касается m

Док-во:

1) $CC_1 = CA_1$ по св. отрезков касан. ~~и т.д.~~ $\Rightarrow \triangle CC_1 A_1$ - r/\sqrt{A} по
отр. $\Rightarrow CN$ - высота и медиана ($N = CN \cap C_1 A_1$, CN - жисс. $\angle C C_1 A_1$)

по св. $r/\sqrt{A} \Rightarrow N$ - середина $A_1 C_1$, то отр. медианы

2) BM - жисс. $\angle B_1 B A_1$, $BM \cap B_1 A_1 = M$, M - середина $A_1 B_1$, анало-
гично с п. 1 $\Rightarrow MN$ и есть ср. линия m по отр. п. 2 и п. 1

$$3) \angle C A_1 C_1 = \angle A_1 C N = \angle, \angle M B A_1 = \angle B$$

4) $\angle B A_1 M = 90^\circ - \beta$ по Т.О. $\angle A$ и св. r/\sqrt{A} , $\angle C A_1 K = 90^\circ - \angle$
аналогично $N?$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 10

шифр 10-15

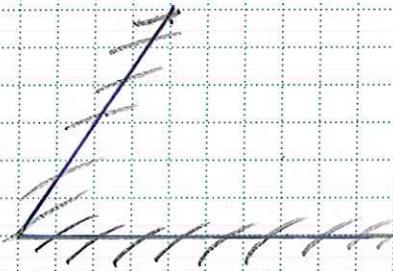
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

5) $\angle K A_1 C_1 = \angle K A_1 B$ по стр. бисс.

\parallel
 $\frac{A_1 B}{2}$ по св. смежных углов, стр. бисс. и п. 4

6) $\angle K A_1 \cap W B C K = \angle$

7) $\angle B A_1 K =$



7) ~~$\angle B A_1 K$~~ $\angle K B C = \angle K C B$ т.к. это впис. \angle субтормонущие
на 1 дугу, $\angle K C B = \angle K B C$ аналогично

~~$\angle K B C = \angle K C B$~~ $\angle B K C = \angle K B C$, $\angle K A_1 C = \angle K C B$ аналогично

8) $\angle C K B$ - впис. $\Rightarrow \angle B K C + \angle B K C = 180^\circ$,

\parallel
 $\angle K A_1 B = 180^\circ$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 10

шифр

10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

✓ 10.6

$a, b, a+b$

c_{10} - последняя цифра числа $a+b$

$a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}}$

$b = \overline{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10}}$

рассмотрим сумму $a_{10} + b_{10}$ и то, сколько нечётных может быть в выражении $a_{10} + b_{10} = c_{10}$

есть 3 варианта, какими a_{10} и b_{10} могут быть

$$a_{10} + b_{10} = c_{10}$$

$$H + H = C$$

$$C + H = H$$

$$C + C = C$$

- среди этих трёх чисел (a_{10}, b_{10}, c_{10}) - максимум 2 нечётных \Rightarrow

\Rightarrow наибольшее число нечётных цифр на

доске = 30 (в числе $a+b$ максимум 11 цифр)

$$10 + 10 + 11 - 1 = 30$$

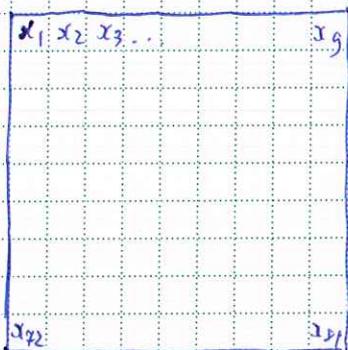
П:

$$\begin{array}{r} 7555555555 \\ + 5555555555 \\ \hline 13111111110 \end{array}$$

Ответ: 30

7

✓ 10.7



Любые два числа, отличающиеся на 3 находятся в соседних клетках \Rightarrow

\Rightarrow на доске образуются

3 "змейки" из арифметических

прогрессий с $d=3$ - "змеёк" столько же, сколько и шал,

~~других прогрессий с таким шагом не существует~~, есть только

3 арифметические прогрессии a, b и c с шагом $d=3$, где

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика класс 10 шифр 10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3$ и внутри этих трёх прогрессий можно получить путём прибавления тройки любое число $e \equiv 1 \pmod 3$, $f \equiv 2 \pmod 3$ и $g \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow$ ~~любые натуральные~~ арифметические прогрессии все числа $\in \mathbb{N}$ можно получить внутри этих трёх арифметических прогрессий \Rightarrow каждое число в таблице будет принадлежать одной из прогрессий.

Условных клеток 4, а прогрессий с $d = 3 - 3 \Rightarrow \Rightarrow$ две какие-то клетки попадают в одной "змейке" $\Rightarrow \Rightarrow$ их разность $= 3n = dn = 3n$ и n - это число элементов арифм. прогрессии, ~~которые принадлежат~~ "от x " (количество клеток таблицы), которые нужно было "пройти" от одного угла до другого. ^{+ последний элемент} ~~числа~~ (второй угловой клетка).

Чисел, которые отнимаются от какого-то x на 3 - максимум 2, а клеток вокруг какого-то x минимум 2 \Rightarrow все 3 "змейки" непрерывны и "не разветвляются" (1 "змейка" всегда идёт 1-й змейкой, не давая начало какой-то другой).

~~Заметим~~ От условия 1. От одной угловой клетки нужно пройти до другой угловой клетки φ клеток (прибавить d φ раз) (если 2 угловые клетки рядом с одной стороной таблицы), если же они напротив друг друга по диагонали, то чтобы попасть из одной в другую нужно "шагнуть" 16 раз, и 8 и 16 - четные числа. Но можно и отклониться от такого маршрута, это просто были те шаги (8 и 16) - которые обязательно нужно сделать, иначе в другую угловую клетку не попасть, можно

предмет математика

класс 10

шифр 10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Крайние и в другие стороны. Давайте рассмотрим маршрут из x , в x_9 (другие маршруты из одной урн. клетки в другие у той же стороны таблицы аналогичны, просто f шагов" обязательно в другом (ну или таком-же) направлении).

если ~~не нужно~~ из x , то есть пусть именно клетки x , и x_9 из одной арифметической прогрессии, тогда нужно сделать обязательные f шагов ~~в~~ вправо, ~~то~~ если же мы прошли сколько-то клеток вниз, то столько же должны вернуться в верх, если прошли сколько-то ~~вправо~~ ^{влево}, то столько же дополнительных шагов" вправо нужно будет снова сделать. То есть

$$n = \underbrace{f}_{\text{обязательные шаги}} + \underbrace{k \cdot 2}_{\text{вниз}} + \underbrace{m \cdot 2}_{\text{вернуться вверх}} \Rightarrow n : 2 \Rightarrow 3n : 6 - \alpha$$

(под $k \cdot 2$ и $m \cdot 2$ в скобках: $k \cdot 2$ - вернуться вправо, $m \cdot 2$ - вернуться вправо)

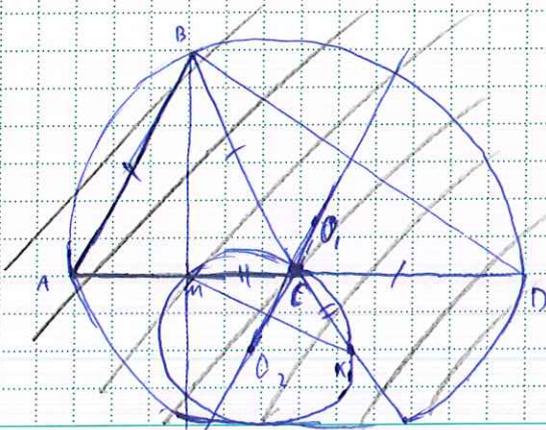
это и была разность.

если клетки из 1-й прогрессии друг напротив друга по диагона-
ли то аналогично, но, обязательные шаги" - 16

$$n = 16 + k \cdot 2 + m \cdot 2 \Rightarrow n : 2 \text{ и } 3n \text{ тогда } : 6$$

Ответ: верно

✓ 10. 8



Дано: M - середина AC

$\triangle ABC$ - π/δ

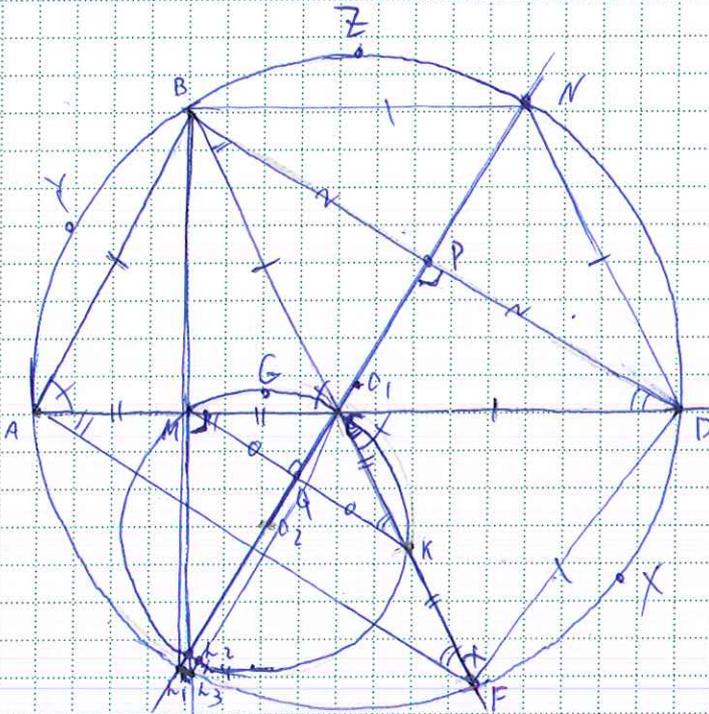
$D \in (AC), BC = CD$

$K \in (BC), CK = CM$

Док-ть: $\angle AKB$ и $\angle KMC$ - касательные.

предмет математика класс 10 шифр 10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



Док-во:

- 1) $(CO_1) \cap \omega_{ABD} = N, L_1, CO_2 \cap \omega_{MCK} = L_2, BM \cap \omega_{ABD} = L_3$
 $(BC) \cap \omega_{ABD} = F, O_1$ - центр ω_{ABD}, O_2 - центр ω_{MCK}
- 2) $BC = CD, MC = CK, \angle BCD = \angle MCK$ по св. верт. $\angle = \angle$
 $\Rightarrow \triangle MCK$ и $\triangle BCD$ - р/д по стор. и подобны
- 3) P и G - середины BD и MK соответственно \Rightarrow по св. р/д \triangle
 CP и CQ - бис. $\angle BCD$ и $\angle MCK$ и сер. перп. к BD и MK
- 4) $\angle CMK = \angle CDB$ по \angle и св. р/д $\triangle \Rightarrow BD \parallel MK$ т.к.
 $\angle CMK = \angle CDB$ - накрест лежащие при BD, MK и секущей $(MD) \Rightarrow$
 $\Rightarrow CQ \perp MK, CP \perp BD$ по ~~св~~ сер. перп. $\Rightarrow CQ \parallel CP \Rightarrow$
 $C - Q - P$ т.к. ~~2~~ 2 прямые \perp 2-м // прямым, и через одну точку
~~2~~ 2 // прямые не проходят.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 10

шифр

10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

5) CA - сеп. пер., $\Rightarrow O_2 \in CA \Rightarrow CK_2$ - диаметр \cup с.м.к.

NK_1 - диаметр \cup_{ABD} - аналогично

6) $N - O_1 - C - O_2 - P - Q - K_2 - L_1$ по п. 4 и п. 5

7) $\angle BDA = \angle AFB$ т.к. они впис. и опир. на $\sphericalangle AB$,
 $\angle DAF = \angle FBD$ аналогично $\Rightarrow \angle CAF = \angle CFA = \angle CBD =$

$= \angle CDB = \angle CKM = \angle CMK$ по п. 2 и с.в.р./с.д. \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle ACF$ - р/д по признаку, $\triangle ACF \sim \triangle MCK$ по УУ \Rightarrow

\Rightarrow и $k=2$ ($\frac{AC}{MC} = 2$) т.к. M - середина $AC \Rightarrow KF = CK$,

$AC = CF$

8) $AC = CF$, $BC = CD$, $\angle BCA = \angle FCD$ по с.в. верш. \angle
по п. 7 \Downarrow по п. 7 с.в.с

$\triangle ABD = \triangle CDF \Rightarrow AB = BC = CD = FD$ по с.в. р/с.д. и

кон. соотв. \uparrow

9) $\triangle CDF$ - р/д т.к. с.в. $= \triangle ABC \Rightarrow \angle DCF = \angle DFC$ по с.в. р/с.д. Δ

10) $\angle DCF = \frac{1}{2} \sphericalangle FXD + \frac{1}{2} \sphericalangle AYB$ т.к. $\angle DCF$ -

внутр. \cup_{ABD} $\sphericalangle FXD = \sphericalangle AYB$ т.к. $AB = FD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCF = \sphericalangle FXD$

11) $\angle CFD = \frac{1}{2} \sphericalangle BND = \sphericalangle BZN$ ($BN = ND$ т.к. N - точка на сеп. пере к BD) $\Rightarrow \sphericalangle FXD = \sphericalangle BZN$ по п. 9 и п. 11

\Downarrow
 $FD = BN = ND = AB$

12) $\angle CKL_2 = 90^\circ$ т.к. опирается на CK_2 - диаметр

$\angle NK_1L_1 = 90^\circ$ аналогично, $\triangle BND = \triangle BCD$ по с.в.с (BD - общ.,

$BC = CD = BN = ND$ по с.в. р/с.д. п. 11 и усл.) NC - выс. $\angle BND$ и

$\angle BCD$ по с.в. р/с.д. ($CBND$ - ромб по с.в.р.) $\Rightarrow \angle BNC = \angle NCD$

по с.в. р/с.д., с.в. выс. и равенства $\Delta \Rightarrow \angle BNC = \angle NCD = \angle MKL_2$

предмет математика

класс 10

шифр 10-15

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

по св. верт. L

13) ~~$\angle NBL_1 = \angle CML_2 = 90^\circ$~~

13) ($\angle CML_2 = 90^\circ, \angle BMC = 90^\circ$ по св. $p(\sigma)A \Rightarrow \angle BML_2 = 180^\circ \Rightarrow \Rightarrow B-M-L_2$)

14) $\angle NBL_1 = \angle CML_2 = 90^\circ, \angle BNL_1 = \angle MCL_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NL_2B = \angle NL_1B$ по $T_0 \subseteq \angle A$ (ΔL_1BN и ΔL_2MC)

15) $\angle BL_1N = \frac{1}{2} \vee BZN = \angle NL_2B = \frac{1}{2} \vee BZN + \frac{1}{2} \vee L_1L_3 \Rightarrow$

$\vee L_1L_3 \in 180^\circ \Rightarrow \vee L_1L_3 = 0^\circ \Rightarrow L_1 = L_3$

16) $\angle_3CAN_{MCK} = \angle_4, \angle ML_2C = \angle BL_3N$ ($\angle BL_3N = \frac{1}{2} \vee BZN$)

по $\angle BL_3N$ $\angle ML_2C = \frac{1}{2} \vee MGC = \angle BL_3N = \frac{1}{2} \vee MGC - \frac{1}{2} \vee L_2L_4$

~~\angle_2L_4~~ $\vee L_2L_4 \in 180^\circ \Rightarrow \vee L_2L_4 = 0^\circ \Rightarrow$

($\angle BL_3N$ - L_3 -сторона от N_{MCK} , а его стороны - секущие) $L_2 = L_3$

($\angle BL_2N$ - угол внутренний в $WABD$)

17) $L_1 = L_2 = L_3$ по п. 15 и п. 16 \Rightarrow это общая точка и она

может быть

18) ~~если $N_{MCK} \cap WABD$ (1 общая точка L_1 уже определена)~~

L_1 - общая не только у $WABD$ и N_{MCK} , но и у их диаметров \Rightarrow

\Rightarrow (три диаметра и проходящих их одной прямой) \Rightarrow

$\Rightarrow L_1$ - единственная точка $\cap N_{MCK}$ и $WABD \Rightarrow N_{MCK}$ и $WABD$

касаются