

# ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА (заполняется оргкомитетом)	ФАМИЛИЯ	ГРЕБЕНКИН	
9-19	ИНИЦИАЛЫ	И	. A .
ПРЕДМЕТ	КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО)		
МАТЕМАТИКА	9		
ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ (ДД.ММ.ГГГГ.)	КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ		
05 . 02 . 2021	9		
ПЕРВЫЙ ДЕНЬ			
05 . 02 . 2021			
ВТОРОЙ ДЕНЬ			
06 . 02 . 2021			

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня,  
титульный лист не считается):

11

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	4	0	-	7	7	7	7	-	46

Председатель жюри: № /И.С. Рубанов/

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

9

шифр

9-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~1

Ответ: нет, не существует

Решение: Прямоугольник 1 со сторонами 2; 6 и 7  
( $2+6>7$ ;  $2+7>6$ ;  $6+7>2$ )

Прямоугольник 2 со сторонами 4; 7; 90  
( $4+7>90$ ;  $4+90>7$ ;  $7+90>4$ )

Тогда имеем две пары - 2; 6 -

попарно совпадают в количестве. Но не существует (+)

треугольника со сторонами 2; 4 и 6,

т.к.  $2+4=6$ , т.е. невозможно построить треугольника

не вспомнилось

~2

$$\begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x \end{cases}$$

может

$$x^2 + y^2 - x - y > x^2 + y^2$$

~~х < 0~~:  $x+y < 0 \Rightarrow (x < 0 \wedge y < 0) \vee (\text{без ограничения})$

~~х > 0~~:  $x > 0$ , т.к. иначе  $0 > y^2$ , но  $y^2 \geq 0 \Rightarrow$  кв. во небольшое

3)  $y < 0$ , т.к. иначе  $0 > y^2$ , но  $x^2 \geq 0 \Rightarrow$  кв. во небольшое.

4) Решение без ограничения  $x > 0 \wedge y < 0$ .

т.к.  $x+y < 0$ ,  $|y| > |x|$

По условию  $x^2 - x > y^2$ , т.к.  $x > 0$ , то  $x^2 > y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| > |y|$ , но  $|y| > |x|$  - противоречие  $\Rightarrow$

\* Обратно:  $x < 0$  и  $y < 0 \Rightarrow xy > 0$ знак +

Ответ: может иметь только знак +

(+)

(+)

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

9

шифр

9 - 19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$$\text{Задача } 1: k = \frac{ab+c^2}{a+b} \quad (\text{Показано } \geq 1 \text{ делит } ab + c^2 \text{ на } a+b)$$

✓

Решение:

Пусть  $a+b$  - имеет 1 делитель  $\Rightarrow a+b = p$ , где  $p$  - простое.  $\Rightarrow b = p-a$

Пусть  $b$  без ограничения обусловлено  $a < p-a$

$$k = \frac{a(p-a) + c^2}{a+b} \quad (\forall a < p-a \Rightarrow ap-a^2 + c^2 \geq ap + c^2 - a^2 \Rightarrow p \geq a^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow c^2 \leq a^2 - p \Rightarrow (c-a)(a+c) \leq p, \text{ т.к. } p \text{ простое} \quad \begin{cases} ca \leq p \\ a+c \leq p \end{cases}$$

Доказано, что  $c \leq b$  (т.к.  $a \leq b$  без ограничения обусловлено)

$$\frac{ab+c^2}{a+b} \geq \frac{b^2+c^2}{2b}$$

$$\frac{ab+c^2}{a+b} \geq a, \quad \frac{ab+c^2}{a+b} \geq \frac{b^2+c^2}{2b} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{2b} \geq a \Rightarrow a^2 + c^2 \leq 2ab$$

$$\text{Но } a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow a^2 + c^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow b^2 \leq c^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c \leq b$ , т.к. числа натуральные.

Задача 1: Доказать, что  $c < a$  ( $a \leq b$  без ограничения обусловлено)

$$\text{Пусть } c > a \Rightarrow \frac{ab+c^2}{a+b} > \frac{ab+a^2}{a+b} = \frac{a(a+b)}{a+b} = a, \text{ но}$$

$\frac{ab+c^2}{a+b} > a \Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow c < a$ .

$$(c-a)(a+c) \leq p$$

$$c < a \Rightarrow c-a < 0, \quad c-a > -p, \quad \text{т.к. } a < p \Rightarrow (c-a) \leq p$$

$$c < a \leq p-a \Rightarrow c \leq p-a \Rightarrow a+c \leq p \quad \text{и} \quad a+c \neq 0 \Rightarrow (a+c) \neq 0$$

$\Rightarrow (c-a)(a+c) \leq p \Rightarrow q(a+b)$  больше 2 делителей

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 9

шифр

9-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Будет  $y = (a+b) - 3$  делитель  $\Rightarrow a+b - \text{квадр.}$

расположение числа. Будет  $(a+b) = p^2 \Rightarrow$

$$ab+c^2 \Rightarrow k = \frac{a(p^2-a)+c^2}{p^2} \Rightarrow ap^2-a^2+c^2 \cdot p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ap^2-a^2+c^2 \cdot p^2 \Rightarrow (c-a)(c+a) \cdot p^2 \Rightarrow \begin{cases} c-a : p \\ c+a : p \\ c-a, p^2 \\ c+a, p \end{cases}$$

$$c < a \Rightarrow c-a < 0; a < p^2 \Rightarrow c-a > -p^2, \text{т.к. } c > 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c-a) \nmid p^2$$

$$(a+c) > 0, \text{ т.к. } c < a < p^2-a \Rightarrow c < p^2-a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+c < p^2 \Rightarrow (a+c) \nmid p^2$$

Значит,  $(c-a) \nmid p \wedge (c+a) \nmid p \Rightarrow$

$$(c-a + c+a) \cdot p \Rightarrow 2c \cdot p.$$

$$a+b = 2c$$

Если  $p=2$ , то  $\frac{1+c^2}{1+1} = k$  (искажение в базе суммирований)

натуральных чисел не поддается)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow k < l$ , т.к.  $k$ -натуральное - противоречие  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p > 2.$$

$$\text{Значит } c \nmid p \Rightarrow c^2 \nmid p^2 \Rightarrow ap^2-a^2+c^2 \cdot p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(p^2-a) \nmid p^2 \Rightarrow ap^2-a^2 \nmid p^2 \Rightarrow -a^2 \nmid p^2 \text{ и } 0$$

$$a \neq 0 \vee -a^2 > -p^2, \text{ т.к. } a < p \Rightarrow -a^2 \nmid p^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  не может такого быть, что  $(c-a) \cdot p \wedge (c+a) \cdot p =$

$\Rightarrow (a+c)(c-a) \nmid p^2 \Rightarrow a(p^2-a)+c^2 \nmid p^2 \Rightarrow k$ -но квадратное - противоречие  $\Rightarrow g(a+b)$  хотят доказать делитель.

$$\text{Пример: } a=3; b=5 \Rightarrow k = \frac{3 \cdot 5 + 1}{3+5} = \frac{15+1}{8} = \frac{16}{8} = 2 < 3 < 5$$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

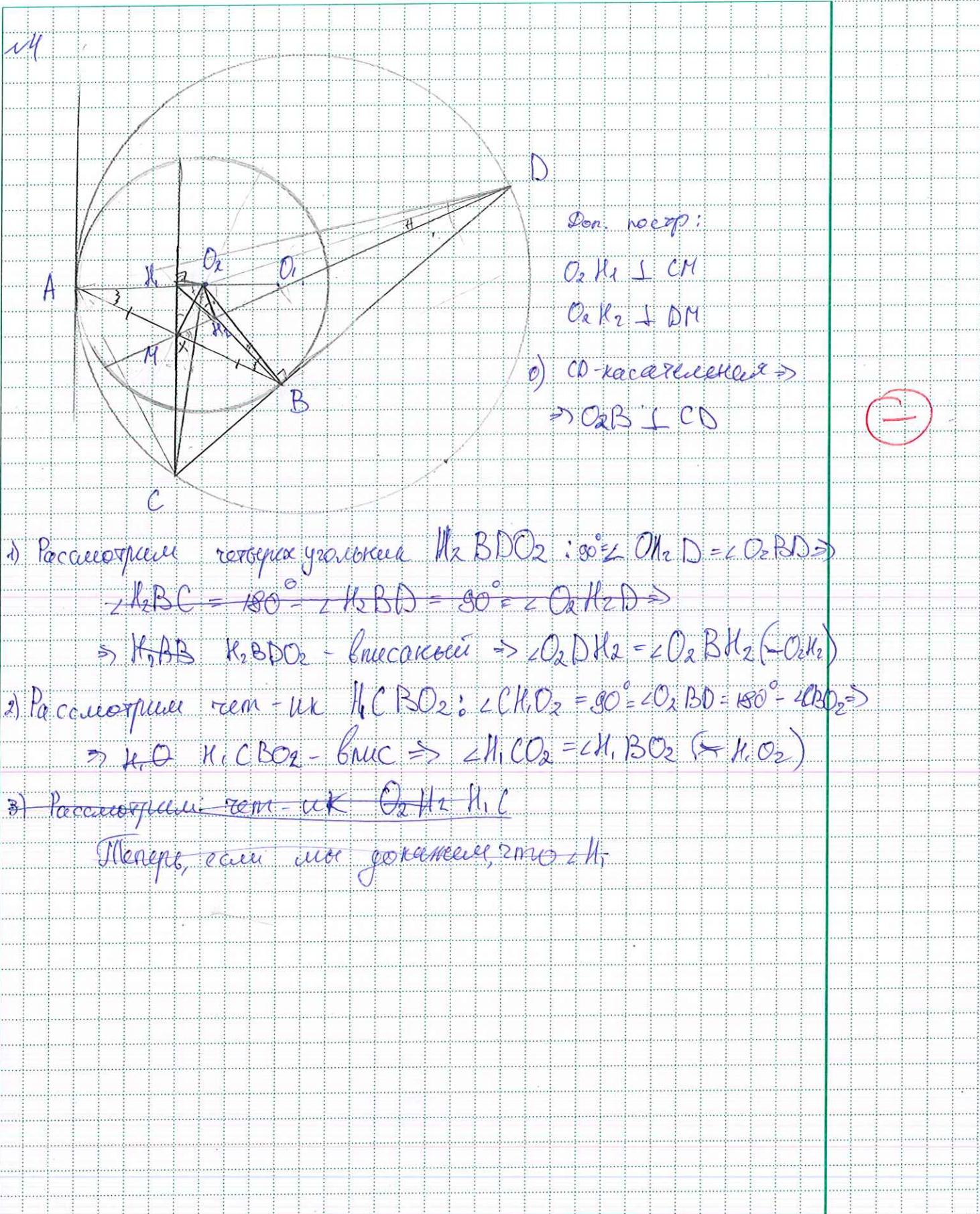
класс

9

шифр

9-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

9

шифр

9-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№

Ответ: 29

Также все 30 эти цифры кратные, тогда складываются 2 кратных 9 числа, значит, получается четное число. Но тогда последняя цифра суммы тоже кратная, хотя все цифры по предыдущему условию кратны — противоречие. Значит, хотя бы 1 цифра четная.

Пример:  $a = 199999999999; b = 199999999999;$

$$c = 399999999998$$

$$\begin{array}{r} 199999999999 \\ + 199999999999 \\ \hline 399999999998 \end{array}$$

(\*) на этой странице  
просим прощения и учесть в  
записи, что всю строку можно разделить на

члены, если член, в котором есть четная  
и одновременно кратна 9 цифра, то  
число можно разбить на

1) 1-4-7... - 79 - все цифры с 1 по модулю 3.

2) 2-5... - 80 - все  $\equiv 2$

3) 3-6... - 81 - все  $\equiv 0$

(Например, вот один из 1. Рядом с ней (буквой  $b$ )  
соседней по строке кратной) есть  $(7, 1, 4, 1 = 3)$ ;  
рядом с 4 — 7; рядом с 7-10 и так далее; рядом  
с 0 с 79 и остановимся. Акологично с другими)  
членами

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

9

шифр

9-13

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№7

Есть 4 угловые кистки. По принципу Дарихея находятся 2 числа из этих кисток, сравнивших по модулю 3 (т.к. всего 3 остатка - 0, 1 и 2).

Пусть эти числа  $a$  и  $b$ .

Тогда  $a$  и  $b$  из однотой кистки  $\Rightarrow$  от  $a$  до  $b$  можно дойти по соседней по стороне кисти, числа в которых отличаются на 3.

$a$	$c$	$d$	$b$
$z_1$	$z_2$		
$z_3$	$z_4$		

Заметим, что если же это будет чётно, то есть если в кисти (или) находится  $a$  и  $b$ , то мы в  $8$  раз понижаем четность ибо путь от  $a$  до  $b \Rightarrow$

$\Rightarrow a$  и  $b$  однотой четности.

Пусть же встали за нужные строки/столбцы  $c$  и  $d$ . Докажем, что у чисел  $c$  и  $d$  верна лице  $b$ .

Четность такая же, как если бы онишли от  $c$  до  $d$  по прямой. 1) Действительно, пусть же онишли вниз влево на  $x$  шагов (шаг - переход через строку), тогда если надо будет в вернуться на предыдущую строку/столбец  $\Rightarrow$  они сделали  $x$  шагов вверх/вправо  $\Rightarrow$  вниз столько же шагов сколько и вверх (по строке) / влево столько же шагов, сколько вправо (по столбцу).

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

3

шифр

8-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№7

- 7)  $|Cf| = \frac{3}{2} |Fd|$  Значит, что в пути  $C-d$  по прямой  
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$  шагов же будет бывше (без обратки-  
 генка однократно, из кармана) сколько  
 в пути за пределами стоянки от  
 столбца С до столбца d (если были другие шаги,  
 то они аналогичны пути, т.к. разбиваются на пары).  
 Значит, скорость при переходе от столбца C до  
 столбца d изменяется так же, как и  
 при пути от C до d по прямой  $\Rightarrow$   
 riegobatся вспять, при выходе за пределы  
 строк/столбца/генык число на строке/столбце  
 a-b соотвествует генности засел, пасущихся  
 при пути от a до b по строке/столбце  
 (возможны II)

Значит а и b одинаковой генности; а  
 riegobatся вспять  $|a-b| : 2 \wedge |a-b| : 3 \Rightarrow$   
 $|a-b| : 6$ , 279.

- 8) Покрасим доску в шахматной порядке, так, чтобы  
 первая верхняя квадратная клетка была чёрной. Тогда все чёрные  
 квадраты чёрные. Значит, что при переходе  
 в клетки одинаковой цвета, цвета  
 меняется  $\Rightarrow$  В клетках одинакового цвета, однократ-  
 однократной генности  $\Rightarrow$  а и b - одинаковой генности  $\Rightarrow |a-b| : 2 \wedge |a-b| : 3 \Rightarrow$   
 $|a-b| : 6$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

9.

шифр

9-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

19

в хорошем слове

Пусть есть 2 буквы, например  $a$  и  $b$ , также что  $a$  и  $b$  встречаются хотя бы по 3 раза.

Пусть  $a$  и  $b$  слове встречаются разны.

Выбросим все буквы слова, кроме трех  $a$  и трех  $b$ .

Значит, что две буквы  $a$  могут подряд не могут, т.к. иначе будет и 2 подряд идущие, суть  $a$ . (или останется три  $b$  и одна  $a$ , а не может разделить  $b b b$  на части, в которых нет двух  $b$ ). части

Значит,  $a$  и  $b$  перегружаются.

$a b a b a b / a b a b a / a b b a b$

$\downarrow$   
 $a \cdot a b \cdot b$

$\downarrow$   
 $a \cdot a b b \cdot$

$\downarrow$   
 $a b a \cdot a$

встречалось  
разных.  $\checkmark$

Но тогда, как показано выше, можно составить конструкцию вида  $a a b b \Rightarrow$  слово было не хорошее — противоречие.

Значит, в хорошем слове нет 2 букв, встречающихся хотя бы по 3 раза. Значит, все буквы, кроме может быть одной, встречаются не более 2 раз.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет **математика**

класс **9**

шифр **9-19**

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

**19**

*в хорошем слове*

Пусть есть  $\alpha$  буквы,  $\alpha' \neq \alpha$  другие встречаются

не более 2 раз. Пусть длина слова  $\geq 2n+2$

Рассмотрим  $\alpha$  буквы,  $\alpha'$  буква и буква  $\alpha$  встречается 2 раза.

$a_1, a_2, a_3, a_4$  и  $b_1, b_2$ , где буква с изменяющим индексом

встречается раньше.

Тогда  $b_1$  встречается раньше  $a_2$  (иначе:  $a_1, b_1, b_2$ )

$b_2$  встречается позже  $a_3$  (иначе:  $b_1, b_2, a_3, a_4$ ).

Но по условию 2 одинаковые буквы

не могут стоять подряд  $\Rightarrow$  между  $a_2$  и  $a_3$  есть

буква, встречающаяся 1 раз.

Пусть слово  $\alpha$  длины  $\geq 2n+2$ . Т.к. есть

буква, встречающаяся 1 раз и одна буква, кроме

такой, встречается  $\leq 2$  раз,  $\alpha'$  встрет.

хотя бы 5 раз:

*в букве встрет. 2 раза*

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ . Тогда  $b_1$  встреч. раньше  $a_2$ , а

$b_2$  позже  $a_4$ . Но по условию, между  $a_3$  и  $a_4$

есть буква, значит есть буква одна буква

встречается 1 раз ( $\Rightarrow$  между  $a_3$  и  $a_4$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$   $\alpha'$  встречается 6 раз  $\Rightarrow$  между и так далее, изменяется как во букве, встречающихся 2 раза  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  все, кроме  $\alpha'$ , встречаются 1 раз  $\Rightarrow \alpha'$  встреч.

$(n+3)$  раза  $\alpha$   $\Rightarrow$  а же это в слове есть 2 подавляющие

буквы  $\alpha'$ , но это невозможно по условию  $\Rightarrow$

*длина слова  $\leq 2n+5$*

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 5

шифр

9-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№9

Башнеерка  $(2n+1)$  abc...na b c...na  
подиб подиб бубль

Считаем, что некоторое парос  $(x,y)$ , где  $x \neq a$  и  $y \neq a$ ,  
таких, что есть можно построить конструкции  
 $xx_1y_1$ , т.к.  $y_1$  встречается ранее  $x$ , но  
позже  $x$ .

Если есть пара aaxx и xxaa

имеет конструкции aaxx или xxaa,

когда бубль центрального, а в среду из  
краиних, то тогда выгравируются  
все бубли между ними  $\Rightarrow$  б. оставшиеся  
"подибы" все бубли, кроме  $a$ , встречаются  
но 1 разу  $\Rightarrow$  конструкции aaxx / xxaa не  
удается.

Ответ:  $2n+1$

№10

Будем доказывать индукцией по  $n$ .

База: для  $n=2$ :  $a < b$  числа  $a$  и  $b$ .

~~•  $a = b \Rightarrow \text{НОК}(a,b) = a = b$  - процесс постепенно-  
противоречие~~

~~•  $a < b \Rightarrow \text{НОК} > b$  (также нет противоречия)  $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \text{НОК} = b + (b-a) = 2b-a$ ; так как  $2b-a > b \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow a < b$ , но  $a < b$  - противоречие~~

для  $n=2$  - невозможное

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

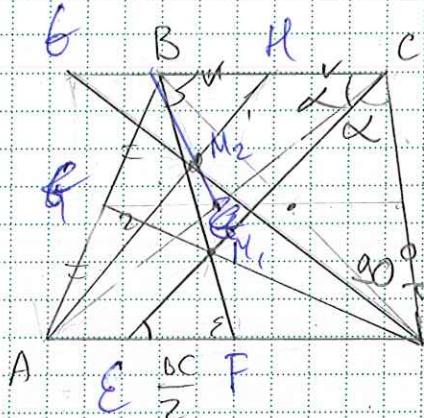
5

шифр

9-19

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№8



$$BC \parallel AD \Rightarrow \angle CED = \angle ECD \Rightarrow$$

$$\angle CBA_1 = \angle M_1FE \Rightarrow \triangle BCM_1 \sim \triangle FPM_1$$

$$\frac{BM_1}{M_1F} = 2 \Rightarrow \frac{BC}{EF} = 2$$

$$2) CE - \text{биссектриса } BC \parallel AD \Rightarrow \angle BCA = \angle ECD = \angle ECD = \angle CDE - p/2 \Rightarrow ED = CD$$

$$CD = ED = EF + FD = \frac{BC + AD}{2}, \gamma - 1 - AF - p/2.$$

$$3) \angle BAH_2 = \angle M_2AF; \angle AFM_2 = \angle M_2BF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AM_2F \sim \triangle M_2BN_2B; \frac{AM_2}{M_2F} = \frac{2}{1} \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AF$$

$$4) \angle M_2NH = \angle M_2DA.$$

$$\angle GM_2H = \angle AM_2H$$

$$\triangle GMR_2H \sim \triangle DP_2H.$$

$$\frac{AM_2}{M_2R_2H} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{GH}{RH} = \frac{2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow GH = \frac{1}{2}AD; HC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC = \frac{1}{2}(AD + BC) \Rightarrow$$

$$BC = CD = \frac{1}{2}(AD + BC) \Rightarrow \text{O.GCD} - p/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DG - \text{биссектриса, т.к. } \angle GCD = 2x \Rightarrow \angle CGD = \angle GDC = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle GAD = 180^\circ - 2x - 90^\circ + x = 90^\circ \Rightarrow$$