

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА
(заполняется оргкомитетом)

9-21

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ

(ДД.ММ.ГГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

05 . 02 . 2021

ВТОРОЙ ДЕНЬ

06 . 02 . 2021

ФАМИЛИЯ КОНОНОВ

ИНИЦИАЛЫ Г . В .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО) 9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ 9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня,
титульный лист не считается):

7

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

| Номера задач | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Сумма баллов |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------|
| Результат | 7 | 7 | 7 | 7 | 0 | 7 | 7 | 7 | 1 | — | 50 |

Председатель жюри: _____

/И.С. Рубанов/

предмет МАТЕМАТИКА

класс 9

шифр

9-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~1) Пусть изначально ослик составил 2 треугольника из шести палочек таких длин: 2, 2, 4, 5, 6, 6. Например, 2, 4, 5 и 2, 6, 6. Тогда в третий он покрасит палочки длин 2, 2, 4, но из них нельзя составить треугольник, так как $2+2 \leq 4$. Значит ослику не обязательно удастся составить два разных треугольника.

$$\sim 2) \begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x > y^2 \Leftrightarrow x^2 > y^2 + x \\ y^2 - y > x^2 > y^2 + x \Leftrightarrow 0 > x + y \end{cases} \text{ Тогда}$$

Есть 2 случая:

1) $x < 0, y < 0 \Rightarrow xy > 0$. Случай возможен, например при $x = y = -1$.

2) $x > 0, y < 0 \Rightarrow xy < 0$. Примем, неважно, какое именно из чисел x и y отрицательно, а какое положительно, так как условие симметрично.

Тогда $-y > x$ ~~или~~ $\Rightarrow y^2 > x^2$. Также по условию $x^2 - x > y^2 \Rightarrow \Rightarrow x^2 - x > x^2 \Leftrightarrow 0 > x$ — противоречие.

Значит, xy может быть только отрицательно.

~~возможно
если
 $x \neq y$?~~

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$$\sim 3) k > 0 \Rightarrow a+b > 2.$$

Предположим, что у $a+b$ не больше 2-ух делителей, то есть $a+b = p > 2$, p -простое.

$$ab+c^2 \equiv a+b \Rightarrow ab+c^2 \equiv p. \text{ Также } a(a+b) \equiv p \text{ и } b(a+b) \equiv p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a+b) - ab - c^2 = (a-c)(a+c) \equiv p \text{ и } b(a+b) - ab - c^2 =$$

$$= (b-c)(b+c) \equiv p. \text{ И, так как } p = a+b > a-c \text{ и } p = a+b > b-c, \text{ то}$$

$$a+c \equiv p \text{ и } b+c \equiv p. \Rightarrow (a+c) + (b+c) - (a+b) = 2c \equiv p, p > 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \equiv p$$

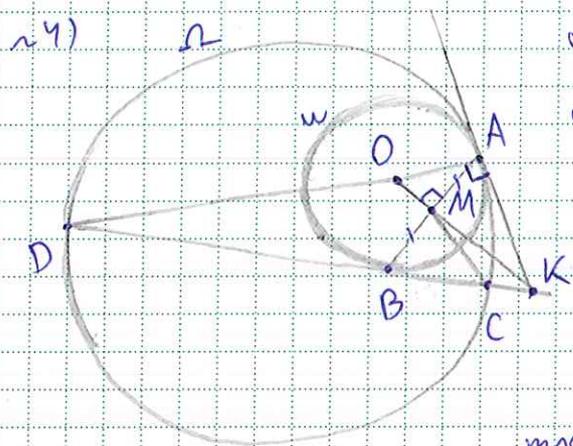
Но условие $\frac{ab+c^2}{a+b} < a \Leftrightarrow c^2 < a^2 \Leftrightarrow c < a < a+b = p$ - противоречие с тем, что $c \equiv p$.

Тогда у $a+b$ хотя бы 3 делителя. Это возможно, например, при $a=10, b=15, c=5$:

$$k = \frac{ab+c^2}{a+b} = \frac{150+25}{25} = 7 < 10 < 15.$$

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 9-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



Доказ-ть: $\angle MOK$ - впис. $\angle MOD$ - впис.

Доказ-во: $OA = OB$ (радиусы ω) \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle BOA$ - р.б. \mid $\Rightarrow OM \perp AB$. (1)
M - сер. AB

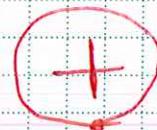
Проведем касательную к ω и Ω в точке A. Пусть она пересекает CD в

А если не пересекается?

точке K. Тогда $KB = KA$ как отрезки касательных к ω . \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle АКВ$ - р.б. \mid $\Rightarrow KM \perp AB$. Учитывая (1), O, M, K лежат на одной прямой.

Кроме того, $OA \perp AK$ как радиус, проведенный в точку касания \Rightarrow



$\Rightarrow \triangle OAK$ - прям. Теперь можно записать:

$\angle MOD$ - впис. $\Leftrightarrow \angle KDO = \angle KMC \Leftrightarrow \triangle KDO \sim \triangle KMC$, т.к. $\angle K$ - общий. $\Leftrightarrow \frac{KM}{KC} = \frac{KD}{KO} \Leftrightarrow KM \cdot KO = KC \cdot KD \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AK^2 = KC \cdot KD$.

Последнее равенство является верным, так как это степень точки относительно ω , значит $\angle MOD$ - впис.

предмет МАТЕМАТИКА

класс 9

шифр 9-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~5) Мысленно разделим доску на 50 пронумерованных слева направо столбцов 100×2 . Каждый столбец, в свою очередь, разделим на 50 квадратов 2×2 , пронумерованных сверху вниз.

Выиграет ^{Петя} Васа, приведем стратегию для него:
Своим первым ходом он закрашивает левую диагональ первого квадрата первого столбца.

Пусть Васа каким-то своим ходом закрашивает впервые в k -ом столбце закрашивает клетки. Тогда Петя закрасит какую-то диагональ квадрата, в котором находится нижняя закрашенная Васей клетка так, что оставшая незакрашенная часть столбца разделится на 2 незакраше-

А почему
не какой
ход Васи
у Петя
будет ответ?
Скажем,
если Васа
закрасит
центральную
столбец 2,
а Петя
после этого
Петя закрасит
клетки первого
столбца до
своего титана.

предмет МАТЕМАТИКА

класс 9

шифр 9-2

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

⁶⁾
а) Предположим, что все цифры нечетные. $\Rightarrow a, b, c$ - нечетные, но сумма $a+b$ четна - противоречие, т.к. $a+b=c$.

Пример на 29 нечет. цифр: $a = 1999999999$,
 $b = 1999999999$, $c = a+b = 3999999998$.

б) ⁷⁾ По принципу Дирихле хотя бы на двух угловых клетках стоят числа, дающие одинаковый остаток при делении на 3.

Заметим, что все клетки с числами, дающими одинаковый остаток при делении на 3 образуют ~~клетки~~ некоторый клеточный многоугольник, так как любые два числа отличающиеся на 3, стоят в соседних клетках. Значит, найдется многоугольник, в который входят хотя бы две угловые клетки.

Раскрасим теперь таблицу в шахматную окраску, причем все угловые клетки будут черными. Между любыми двумя черными клетками „манхэттонское расстояние“ будет четным \Rightarrow числа на черных клетках внутри одного многоугольника будут отличаться на $2 \cdot 3 \cdot k = 6k$.

Следовательно, найдутся обязательно две угловые клетки, разность чисел на которых делится на 6.

предмет МАТЕМАТИКА

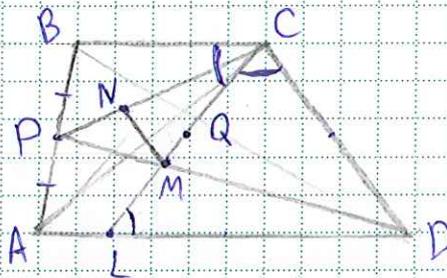
класс 9

9

шифр 9-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~ 3) Дано: P - сеп. AB ; M, N -
центры $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ соотв.;
 Q - сеп. биссектрисы CL .



Так как M и N - центры, то
точки D, M, P лежат на одной прямой и точки C, N, P лежат
на одной прямой, причем $\frac{DM}{MP} = \frac{CN}{NP} = \frac{2}{1} \Rightarrow NM \parallel CD$.

В $\triangle PNM$ и $\triangle CDP$: $\angle P$ - общий, $NM \parallel CD \Rightarrow \frac{NM}{CD} = \frac{PM}{PD} = \frac{1}{3}$.

Продлим DP до пересечения с прямой BC в точке K .

Тогда в $\triangle CMK$ и $\triangle DML$: $\angle KBC = \angle KCM = \angle MLD$ (накрест-
лежащие при $BC \parallel AD$), $\angle CMK = \angle DML$ (верт.) \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle CMK \sim \triangle DML$ и $\frac{CM}{ML} = \frac{KM}{MD} =$

$\triangle KPB = \triangle DPA$, т.к. $AP = PB$, $\angle APD = \angle BPK$ и $\angle PAD = \angle PBK$ \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{CM}{ML} = \frac{KM}{MD} = \frac{2}{1}$

С учетом того, что Q делит CL пополам, то $\frac{CQ}{QM} = \frac{3}{1}$.

Теперь в $\triangle NMQ$ и $\triangle DCQ$: $\frac{NM}{CD} = \frac{MQ}{QC} = \frac{3}{1}$, $\angle NMQ = \angle DCQ$, т.к.

$NM \parallel CD \Rightarrow \triangle NMQ \sim \triangle DCQ \Rightarrow$ N, Q, D лежат на

одной прямой

Примем, так как $\angle DCL = \angle BCL = \angle CLD$, то бисс. $\angle D$ прохо-
дит через середину CL точку Q .

Значит, биссектриса проходит и через точку N , т.к. Q

предмет

класс

шифр

9-21

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

9) Требуется доказать истинность утверждения по какому-либо буквам в алфавите n .

Утверждение. Слово хорошее, если его длина не больше $2n+2$ и оно состоит из n различных букв. Тогда можно доказать, что любое слово длины хотя бы $2n+2$ можно разбить на два хороших слова. Привели в слово n различных букв.

База. При $n=2$ буквы будут чередоваться. Составили от любого слова только первые шесть букв: $ababab$. Тогда можно вычеркнуть 2-ую и 5-ую буквы. Получится $abab$, значит, любое такое слово можно и база доказана.

Шаг. Пусть теперь утверждение верно для любого кол-ва букв, не превышающего $n-1$. Рассмотрим алфавит длины n букв и слово длины хотя бы $2n+2$. Тогда найдется буква, которая встречается не больше двух раз. ~~Все буквы встречаются в слове встречаются не менее трех раз.~~ Вычеркнем ее и получим слово из $n-1$ различных букв длиной не меньше $2n$. Для него выполняется утверждение, значит, искомого слова тоже можно.

Любую можно вычеркнуть? Может перебраться в другое слово.

Пример на $2n+1$. Пусть (k) - k -ая буква алфавита.

Тогда слово $(1)(2) \dots (n)(1)(2) \dots (n)(1)$ хорошее. Попробуем

вычеркнуть из него все буквы, кроме букв "а" и "в".

Если среди "а" и "в" есть (1) , то получится $(1)(m)(1)(m)(1)$;

Если среди "а" и "в" нет (1) , то получится $(m)(l)(m)(l)$, где

m и l - какие-то числа не больше n . В обоих случаях слова хорошие, значит ответ: $2n+1$.