

# ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА  
(заполняется оргкомитетом)

9 - 22

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ  
(дд.мм.гггг.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

0 5 . 0 2 . 2 0 2 1

ВТОРОЙ ДЕНЬ

0 6 . 0 2 . 2 0 2 1

ФАМИЛИЯ КУИМОВ

Д . М .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО)

9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ

9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня,  
титульный лист не считается):

9

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	0	0	7	7	7	1	0	43

Председатель жюри: № /И.С. Рубанов/

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-22

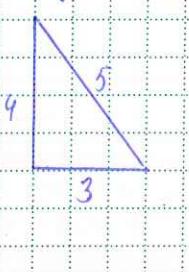
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

1.9.1

Ответ: не однозначно

Пример: единственный треугольник со сторонами: 3, 4, 5 и очень "вилчаковой" равнобедренный треугольник со сторонами: 10, 10, 1, такие треу-  
гольники существуют т.к. вилчаковая кривизна треугольника

+



Очевидно, что в первом случае будем получать

такие же длины: 3, 4, 5 и т.к.  $4 = 1 + 3$ , то не

выполнимся неравенство треугольника  $\Rightarrow$  ошибки

составим новый треугольник

1.9.2

$$\begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y > x^2 + y^2 \Rightarrow -x - y > 0 \Rightarrow x + y < 0$$

Отсюда следует, что  $x > 0$  и  $y > 0$  не может быть никогда

$x + y > 0$

1)  $x < 0$  и  $y < 0$  может быть, пример:  $x = -\sqrt{2}$ ,  $y = -\sqrt{3}$

$2 + \sqrt{2} > 3$  и  $3 + \sqrt{3} > 2$  — верно т.к.  $\sqrt{2} > 1$

+

2)  $x < 0$  и  $y > 0$ , тогда т.к.  $x + y < 0$ , то  $|x| > |y|$

$y^2 - y > x^2$ , т.к.  $y > 0$ , то  $y^2 > x^2 \Rightarrow |y| > |x|$   $M$

3)  $x > 0$  и  $y < 0$ , тогда т.к.  $x + y < 0$ , то  $|x| < |y|$

$x^2 - x > y^2$ , т.к.  $x > 0$ , то  $x^2 > y^2 \Rightarrow |x| > |y|$   $M$

$\Rightarrow$  может быть только  $x < 0$  и  $y < 0 \Rightarrow xy > 0$

Ответ: только  $+(xy > 0)$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№3

Также без убийства  $a \geq b$ , тогда заметим, что  $c = b \Rightarrow$   
 $\Rightarrow K = \frac{ab + b^2}{a+b} = \frac{b(a+b)}{a+b} = b$ , то  $b$  не меньше  $a$  и не меньше  $b \Rightarrow$   
 $\Rightarrow c < b$ , ~~и~~  $\Rightarrow c < a$ , тогда получим  $c = b - m$ , где  $m$  - натуральное  
 и  $m < b$ , тогда

предположим, что  $a+b$  рациональное:  $a+b = p$ , тогда

$$ab + c^2 = K(a+b) \Leftrightarrow ab + (b-m)^2 = K(a+b) \Leftrightarrow ab + b^2 - 2bm + m^2 = K(a+b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b(a+b) - \cancel{m(b-a)} = K(a+b), \text{ тк } b(a+b) : a+b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u \frac{m(2b-m)}{(a+b)} : p, \text{ тогда } \frac{u}{a+b}$$

$m:p$  ~~натуральное~~  $2b-m:p$ , предположим  $p$ -простое, тк  $m < b$ , а

$p = a+b \Rightarrow m < p \Rightarrow m:p$ , тогда  $2b-m:p$ , тк  $2b-m \leq 2b-1$ , тк

тк  $a > b$ , тк  $a+b > 2b > 2b-1 \Rightarrow 2b-m < p \Rightarrow 2b-m:p$   $\nmid p$   $\Rightarrow$  иначе.

$\Rightarrow a+b$  не простое  $\Rightarrow a+b$  делится хотя бы на 3 натуральных делителя

Пример:  $a=15$   $b=10$   $a+b=25 \neq 25:1$   $25:5$   $25:25$ ;  $c=5$

$$\frac{15 \cdot 10 + 25}{15+10} = \frac{175}{25} = 7 < 10 \quad u \quad 7 < 15$$

Ответ: 3

+

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

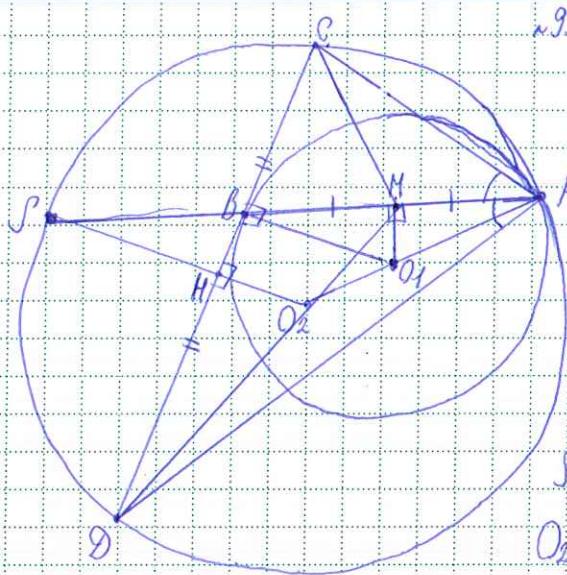
класс

9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



н.94  
 $\angle O_1BC = 90^\circ$ , т.к.  $CD$ -касательная  
 $\rightarrow \angle O_1CH = 90^\circ$ ,  
 сделаны гипотезы  $H_1$ ,  
 тогда  $O_1B$  перпендикуляр  $O_2O_1$ ,  
 т.к.  $B$  лежит в окружности  
 на окр.  $O_1$ . Пусть  $O_2H$ -сур-пер.,  
 $S = (O_2H) \perp l$ , тогда  
 $O_2H \parallel O_1B$ , т.к. они  $\perp CD \Rightarrow$

$\Rightarrow$  т.к. из отрезки при гипотезах переходят в параллельные, то  
 $O_1B$  перпендикуляр  $O_2S \Rightarrow$  учим гипотезы 1, т.к.  $B$  и  $S$  на одной  
 прямой, т.к.  $HS$ -сур-пер к отрезке  $CD$ , но  $AB$ -бис-са  $\angle CAD$ .  
 также  $\angle O_1HA = 90^\circ$ , т.к.  $O_1O_2$  - п.д.  
 ЧТО ДЕЛЯЩЕ?

н.95



Онлайн-Пингвины, пусть Пингвин начинает с хода в  
 в верхнем левом квадрате  $2 \times 1$  м. длиной,  
 замети, если Пингвин ходит 1 этап квадрате в  
 какую-то клетку, то Пингвин ходит в последнюю  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  квадрат закрыт, если Пингвин не ходит в этот  
 квадрат, то Пингвин смотрит следующий этап,  
 и бортиком или п.д. уходит  
 если такие закрыты 2 квадрата, то это он

Почему  
 не шахматы  
 ход виски  
 у него  
 есть ответ?

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА

класс 9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

н. 9.6

Ответ: 29

Пример:  $a = 111111111$      $b = 79999999999$

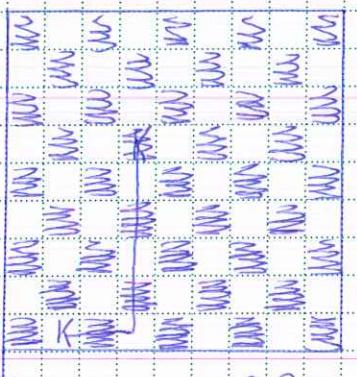
$$c = a+b = 9111111110$$

Оценка: Число все 30 цифр - кратное, тогда остатки и последние цифры 1 десетинной записи числа тоже кратны  $\Rightarrow$  все числа кратны, то сумма  $a+b$  должна быть кратна 11  $\Rightarrow$  максимум 29 цифр.

н. 9.7

Ответ: верно

Док-во: получили наше пятачку в шахматную раскраску,

 тогда в ней будет 41 чёрных клеток и 40 белых.

Также разделим все наши числа на 3 группу

остановим их по модулю 6:

1) остаток 1:  $7; 7; 13; \dots; 79$

2) остаток 2:  $2; 8; 10; \dots; 80$

3) остаток 3:  $3; 9; 15; \dots; 91$

4) остаток 4:  $4; 10; 16; \dots; 70$

5) остаток 5:  $5; 11; 17; \dots; 77$

6) остаток 0:  $6; 12; 18; \dots; 78$

Получилось 3 группы по 13 чисел и 3 группы по 14 чисел

Теперь заметим, что числа с одинаковыми остатками по модулю не

могут стоять в разных по цвету клетках. Тогда это так, тогда в какой-то

белой и чёрной клетках стоит число с остатком 0.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

19.7 (Медианы)

При рассмотрении пусть любой луч от окна к двери. На каждом из этих путей числа отличаются на 3  $\Rightarrow$  с каждой стороны смежные чётные на 3.

остаток  $\equiv$  будет меняться и т.к. число站在 разных чётных, то будет меняться.

как-то горд  $\Rightarrow$  их остатки должны отличаться на 3, но они равны 1.

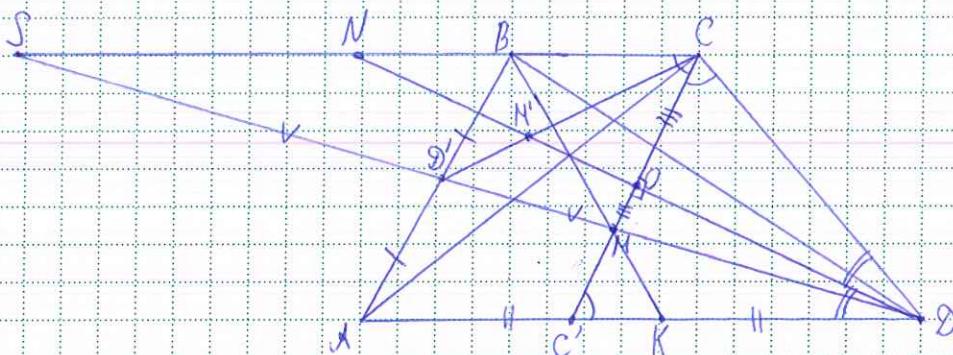
Симметричным разбиением это будет то что белье и чай хранят в клетку

запись: 14; 14; 13 на чёрных и 13; 13; 14 на белых. Т.к. все чёрные клетки чёрные,

а на чёрных стоят числа 3-х чётных  $\Rightarrow$  в каких-то двух клетках будут стоять

числа одной чётности  $\Rightarrow$  их разности будет кратна 6 ч. т.г.

19.8



Продолжим медианы  $BN$  и  $DD'$ ,  $DD'$  - вертикаль.  $N = AK \cap DD'$  то условие

$CN$  - бисс. са пересекает  $AD$  в т.  $C$ . Продолжим  $DD'$  за т.  $D'$  до пересечения с  $(BC)$ ;  $S = (BC) \cap (DD')$ , тогда т.к.  $BS \parallel AD$  и  $AD' = D'B \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle SBD = \angle ABD$ ,  $\angle SDB = \angle ADB$  (вёртка).  $\Rightarrow \angle SDB = \angle ADB \Rightarrow$

$\Rightarrow SD' = D'D$ .  $\angle C'CD = \angle C'CB = \angle C'CD$   $\Rightarrow \angle C'CD = 180^\circ$ , убедим в

каких бисс. са эти же вертикаль и медиану  $DD'$  и убедим ее что  $O$  где

пересекают  $(BC)$ ;  $N = (BC) \cap (DD')$ . Продолжим медиану  $CD'$ , получим

$M' = D'C \cap DN$ , доказали, что  $M'$  - т. пересеч. медиан  $AD$  и  $BC$ , для этого достаточно доказать, что  $CN' : M'D' = 2 : 1$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА

класс 9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 9.8 (продолжение)

$BH : MK = 2 : 1$ , т.к.  $M$ -точка пересечения медианы  $\Delta C'NK \sim \Delta BN'C$ , т.к.

$\angle C'MK = \angle BMC$  (вертикальные) и  $\angle C'KM = \angle MDC$  (внешний-внешний)  $\Rightarrow CN : MC' = 2 : 1$ ,

также  $CO : OC' = 1 : 1$ , т.к.  $DO$ -медиана  $\Rightarrow CO : OM = 3 : 1$ , потому что

известно  $CN = a$ ,  $MO = b$ ,  $OC = a+b$ ;  $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a + a = 2b \Rightarrow a = 2b \Rightarrow$

$\Rightarrow CO : OM = (a+b) : b = 3 : 1$ .

Теперь на чертеже Медиана, где  $\Delta SCN$  и меньший  $\Delta ND$  заштрихованы

равенство:  $\frac{SD}{ND} = \frac{MO}{OC} = \frac{CN}{NS}$ :  $SM : MD = CM : MC'$ , т.к.  $\Delta SCN \sim \Delta C'ND$ ;

$\angle C'ND = \angle SCN$  (вертикальные);  $\angle MC'D = \angle MCS$  (внешний-внешний), а  $CN : MC' = 2 : 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow CM : MD = 2 : 1 \Rightarrow SD : ND = 3 : 1$ .

$\frac{3}{1} : \frac{1}{3} \frac{CN}{NS} = 1 \Rightarrow SN = NC \Rightarrow DN$ -медиана  $\ell$  в  $\Delta SCD$ , также и

$CD'$ -медиана, т.к.  $SD' = D'D \Rightarrow CN' : ND' = 2 : 1$  т.к. г.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№97

Ответ:  $2n+1$

Доказательство. Пусть  $n \geq 1$ , т.к.  $n \geq 1$ , то база для  $n=1$  верна.  
Чтобы у нас есть буквы  $a$  и  $b$ , они должны чередоваться исходя из условия,  
но тогда для последовательности из 5-ти букв  $ababb$  можно выделить

2-ые и 5-ые  $\Rightarrow$  она уже 1-ая  $\Rightarrow$  макс 5-букв  $ababa$  - хранит и  
 $5 = 2 \cdot 2 + 1$  - верно.

Предположение. Пусть для всех  $K \leq n$  хранит последовательность состоящим

макс из  $2K+1$  букв, докажем, что для доказана из  $(K+1)$  буквы хранит  
последовательность из  $2(K+1)+1 = 2K+3$  букв.

Перехд.: Док-во: рассмотрим такую последовательность из  $(K+1)$  букв,  
с макс кол-вом букв. Заметим, что мы можем исключить из неё одну  
букву, без потери общности, какую-то  $a$ , тогда останется последовательность из  
 $K$  букв, для которых так хранят из условия хранят, иначе исходная  
буква либо  $a$  либо длиной не биши  $2K+1$  исходя из предположения.

1) Если она длиной  $2K+1 \Rightarrow$  в ней есть хотя бы одна буква, которую встреча-  
ется в сама би 3 раза, пусть это без потери обн.  $b$ , тогда вернём  $a$  и  
исключим макс из  $a$  и  $b$ :  $-b-b-$  это должна быть хранит.

последовательности из 2-ух букв  $\Rightarrow$  из предположения она макс из 5-ти  $\Rightarrow$  макс  
2 буквы  $a$ , тогда  $b$  исходит из последовательности из биши, т.к.  $2K+1+2=2K+3$ .

2) Если она длиной от  $K+1$  до  $2K$ , тогда в ней есть хотя бы одна буква  
которая встречается хотя бы 2 раза, пусть  $b$ , аналогично вернём  $a$  и исключим  
из  $a$  и  $b$ :  $-b-b-$  макс 5  $\Rightarrow$  макс 3  $a$   $\Rightarrow$  в исходной макс  $2K+3$

3) Если она от 0 до  $K$

Посл-ть с.б.  
много, а после  
удаление  
стать хранит.

Или после  
удаления  
соседние  
стать одинаковыми.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

19.9 (продолжение)

Если в исходной последовательности буквы строятся хотя бы

ближе  $2(k+1)+1$ ?

3 ряда  $\Rightarrow$  какая строится max 2 ряда  $\Rightarrow$  всего max  $(k+1) \cdot 2 = 2k+2 < 2k+3$   
букв

после а

Если такая есть, то исключим любую букву, кроме этой, лучше это

б, пога краине а из предложенного max  $2k+1$  входит в

$\frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{3}{3} \frac{4}{4}$ , заметим, что когда мы берём а, то мы  
не можем брать из между б, иначе можно сделать добавки вниз,  
(1,2,3 и тд)

потому если за а в другом месте, то следующие ложные, если

абафв, если абафв, если вфафа  $\Rightarrow$  max где а меньше

Не все случаи

Вернуть  $\Rightarrow$  если max  $2k+1+2 = 2k+3 \leq 2k+3$  - верно 4 ряд

Пример: 1 букв:  $\underbrace{(a, b, c, d, \dots, z)}_n$ ,

многорядность:  $\underbrace{(a, b, c, d, \dots, z)}_n, \underbrace{(a, b, c, d, \dots, z)}_n, \dots, a$  всего  $2n+1$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-22

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Задача № 10  
Всего на доске записано чисел = как бы порядок из  $n$  чисел, а их

1.  $(n-1)$ , то если все числа на доске меняются местами, а их

2.

Такое утверждение, что, если есть  $a; b$  и  $a \leq b$ , то  $\text{НОК}(a; b) = a$

$\text{НОК}(a; c) = a$   $M \Rightarrow$  таких нет, ~~таких нет~~ таких нет

записано на доске.

А если нет?

