

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА
(заполняется оргкомитетом)

9-06

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ

(дд.мм.гггг.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

0 5 . 0 2 . 2 0 2 1

ВТОРОЙ ДЕНЬ

0 6 . 0 2 . 2 0 2 1

ФАМИЛИЯ ПАЮСОВ

ИНИЦИАЛЫ Н . С .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО)

9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ

9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня,
титульный лист не считается):

9

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

| Номера задач | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Сумма баллов |
|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|--------------|
| Результат | 7 | 7 | 6 | 7 | - | 7 | 7 | 7 | 3 | - | 51 |

Председатель жюри: _____ /И.С. Рубанов/

**РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ**

предмет **математика**

класс **9**

шифр

9-06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N1

Чтобы не обделять. Всё же, например, 2 треугольника со сторонами 10, $\frac{19}{2}$, 1 и 9, $\frac{17}{2}$, 1.

Оба треугольника существуют, т.к. $10 < \frac{19}{2} + 1 = 10,5$ и

$9 < \frac{17}{2} + 1 = 9,5$. После погаси можно будет составить треугольники со сторонами 10, $\frac{19}{2}$, 9 и $\frac{17}{2}$, 1, 1. Второй треугольник не существует, т.к. $\frac{17}{2} > 1+1=2$.

N2

$$x^2 - x > y^2 \Leftrightarrow x^2 > y^2 + x$$

$$x^2 - x - y > y^2 - y > x^2 \Leftrightarrow x + y < 0$$

Сумма чисел меньше 0, либо если они оба отрицательны, либо если одно из них положительно, а другое отрицательное и модуль положительного меньше модуля отрицательного.

1-ый случай: $x < 0$ и $y < 0$, тогда $x+y > 0$

подойдут, например, такой варианты возможен, например, $x = -0,5$ и

$$y = -0,4 : (-0,5)^2 - (-0,5) = 0,75 > 0 \text{ и } (-0,4)^2 - (-0,4) = 0,56 > (-0,5)^2 = 0,25$$

2-ой случай: $x > 0$, $y < 0$ и $|x| < |y|$ (случаи $x < 0$, $y > 0$, $|x| > |y|$

аналогичны этому), тогда $x+y < 0$

В таком случае $x^2 - x > x^2 < y^2$ что невозможно приведено
т.к. $x > 0$ т.к. $|x| < |y|$

условию, таким, такой случай невозможен

Ответ: $x+y > 0$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет **математика**

класс **9**

шифр

9-06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N³

Без ограничения общности считаем, что $a < b$

$$k = \frac{ab + c^2}{a+b} < a \Leftrightarrow ab + c^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow \cancel{ab} < a^2 - c^2 \Leftrightarrow c < a$$

Итак, мы получили, что $c < a < b$.

≤ 8

Таким образом $a+b$ имеет Число $a+b$ не может быть равно одному

делимому, т.е. $a \geq 1$ и $b \geq 1 \Rightarrow a+b \geq 2 > 1$, а все числа, которые

больше 1 имеют хотя бы два делителя: единицу и само число.

• Тогда число $a+b$ имеет ровно 2 два делителя, тогда $a+b = p$ -простое

$$\text{В таком случае } k = \frac{ab + c^2}{a+b} = \frac{a(p-a) + c^2}{p} = a - \frac{a^2 - c^2}{p} = a - \frac{(a-c)(a+c)}{p}$$

но $c < a < a+b = p$, значит, $0 < a^2 - c^2 < p \Leftrightarrow 0 < \frac{a^2 - c^2}{p} < 1$,

но тогда число $a - \frac{a^2 - c^2}{p}$ не может быть натуральным,

н.к. не является натуральным число $\frac{a^2 - c^2}{p}$

• Тогда число $a+b$ имеет ровно три делителя, тогда $a+b = p^2$,

$$\text{где } p-\text{простое число. В таком случае } k = \frac{ab + c^2}{a+b} = \frac{a(p^2-a) + c^2}{p^2}$$

мы знаем, что $0 < ac < a < p$, тогда $0 < a-c < p$,

а также $0 < a+c < a+b = p$. Это есть мы получаем,

что $\frac{(a-c)(a+c)}{p^2}$ должно быть натуральным числом, то есть

другой стороны $(a-c)(a+c) \nmid p$, н.к. $a-c \nmid p$ (т.к. $0 < a-c < p$) и

$a+c \nmid p$ ($0 < a+c < p$), значит, $\frac{(a-c)(a+c)}{p^2}$ не натуральное, то

значит и $k = a - \frac{(a-c)(a+c)}{p^2}$ не натуральное.

скоро видел

• Тогда число $a+b$ имеет ровно 3 делителя, тогда $a+b = p^2$,

$$\text{где } p-\text{простое число. В таком случае } k = \frac{ab + c^2}{a+b} = \frac{a(p^2-a) + c^2}{p^2} =$$

$$= a - \frac{a^2 - c^2}{p^2}$$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет **математика**

класс **9**

шифр

9-06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N3 (продолжение)

мы знаем, что $0 < c < a < p \Leftrightarrow 0 < c^2 < a^2 < p^2$, то тогда $a^2 - c^2 < p^2$,

находим, что $\frac{a^2 - c^2}{p^2} < 1$, т.е. $\frac{a^2 - c^2}{p^2}$ не единица, но тогда и

$$k = a - \frac{a^2 - c^2}{p^2} < 1$$

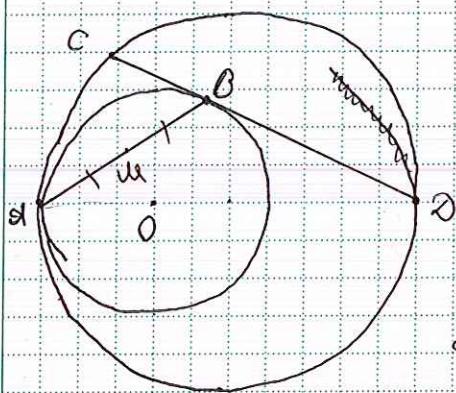
. Тогда число $a+b$ имеет ровно 4 деления. В таком случае

под условие задачи подходит числа $a=7, b=8, c=2$, тогда

у числа $a+b=15$ 4 деления ($1, 3, 5, 15$) а $k = \frac{7+8-2^2}{7+8} = 4 < \frac{a}{a+b} < 8/15$

Ответ: 4

N4



O - центр ω R - радиус ω

Внешний Внешний касание с касанием

Внешний касание относительно ω :

прямая AB перейдёт в окружность, на которой
будет находиться т. O; точки A и B перейдут

сама в себе ($A \in \omega$ и $B \in \omega$); прямая CD перейдёт

в окружность, которая касается ω в т. B и проходит через т. O;

окружность S_2 перейдёт в окружность, которая касается ω в т. A и
внешне ω_2 (т.к. ω_2 касается ω в т. A и лежит внутри ω_2);

точки C и D перейдут в точки пересечения ω_2 и ω_3 ; прямая OM

перейдёт сама в себя $\Rightarrow M'A = M'B$ (M -середина пер-мер $\angle AB$,

A и B перейдут сами в себе и $M' \in OM$), где M' -середина AB ,

M' лежит вне ω , т.к. M лежит внутри ω .

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

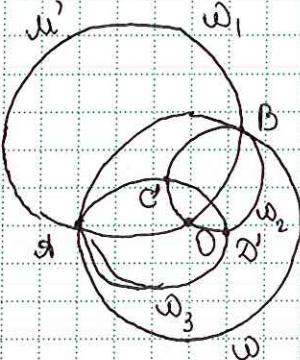
предмет **математика**

класс **9**

шифр

9-06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



N ч (продолжение)

$$M'A = M'B \text{ и } O_1A = O_2B \Rightarrow AA^2 - \text{диаметр } \omega_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle M'A0 = \angle M'B0 = 90^\circ$ (внешние углы приложенные к диаметру) $\Rightarrow M'A$ и $M'B$ — касательные к ω \Rightarrow

$\Rightarrow M'A$ — касательная к ω_3 (ω и ω_3 касаются в л. А)
и $M'B$ — касательная к ω_2 (ω и ω_2 касаются в л. В)

Таким образом, что отрезки касательных из M' к ω_2 и ω_3 равны \Rightarrow

\Rightarrow стяжка M' отождествимо ω_2 и ω_3 одинаковы $\Rightarrow M'$ находится на радиусах оси ω_2 и ω_3 . C' и D' — точки пересечения ω_2 и ω_3 \Rightarrow

$\Rightarrow C'$ и D' находятся на радиусах оси ω_2 и ω_3 .

Радиусами ось ω_2 и ω_3 — прямая, проходящая ~~через~~ ^{перпендикулярная} центрам центров

ω_2 и ω_3 , значит, точки M' , C' , D' лежат на одной прямой, которая не проходит через т. О ($m.e. m.O \in \omega_2$ и $m.O \notin \omega_3$) \Rightarrow $A \in \omega_2$ и $B \in \omega_3$ исходной

ситуации. Точки M' , C' , D' лежат на одной осях симметрии окружности,

помимо проходящей через т. О

к. п. г.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 9

шифр

9-06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N^o 6

Решение:

Теорема: Если все цифры квадрата бывают кратными 9, т.к.

сумма кратных равна чётной, а не кратной. Таким образом, хотя бы одно из чисел чётно, т.е. оканчивается чётной цифрой, значит, кратные цифры не больше 29.

Пример: $a = 1999999999$, $b = 7999999999$, си

$$c = 4999999998$$

или кратчайшее замечание $a+b = 19 \dots 9 + 79 \dots 9 = 20 \dots 0 - (1+80 \dots 0) - 1 = 100 \dots 0 - 2 = 9 \dots 98 = c$.

Ответ: 29

N^o 7

Да, обеззашко. Замечаем, что все квадраты можно представить

в виде 3 „зигеев": 1-4-7-10-...-79, 2-5-8-11-...-80,

3-6-9-12-...-81. При чём любые 2 последовательных числа в

квадрате „зигея" стоят в соседних квадратах доски. Замечаем, что

у доски есть 4 угловые квадраты, а „зигеев" всего 3, значит, найдётся „зигейка", которая проходит хотя бы через 2 угловых квадрата. Тогда мы рассмотримо такую её.

Покрасим всю доску в шахматную раскраску, тогда все угловые квадраты будут одинакового (число чётных) цвета. Замечаем, что при движении по „зигею" происходит переходение цвета квадратов и чётности чисел, значит,

в пределах одной „зигейки" числа однотой чётности стоят на одинаковых цветах, но это означает, что и в угловых квадратах, находящихся числа однотой чётности, тогда их разность чётна и делится на 3

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 9

шифр

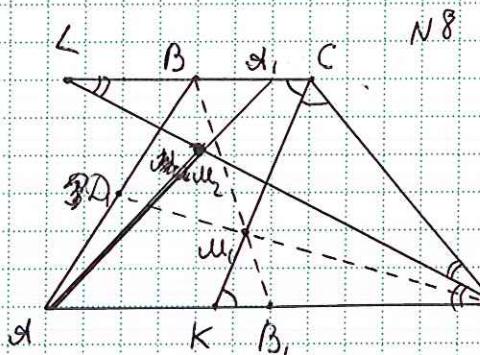
9 - 06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

7
№ (продолжение)

тогда их разность чётна и делится на 3 (по определению чётности), т.е. делится на 6.

+



N 8

$\triangle BCD$ - исходная трапеция

BB_1 и DD_1 - медианы $\triangle BCD$

M_1 - т. пересечения медиан $\triangle BCD$

CK и DL - бис-с $\angle BCD$ и $\angle ADC$.

отмечено на отрезке DL между M_1 и L , что

проведём $\triangle A_1$ -медиану $\triangle ABC$. Пусть M_2 - т. пересечения DL и A_1D .

$\angle KCD = \angle LCK = \angle CKD \Rightarrow \triangle CDK$ - р/с $\Rightarrow KD = DC$
 CK - бис-с $\angle BCD$

аналогично можно показать, что $LC = CD$ $\Rightarrow LC = KD$

$\triangle K M_1 B_1 \sim \triangle C M_1 B$ $\Rightarrow \frac{KB_1}{BC} = \frac{M_1 B_1}{M_1 B} = \frac{1}{2} \Rightarrow KB_1 = \frac{BC}{2}$

M_1 - центр тяж.

аналогично можно показать, что $\angle A_1 = \frac{KD}{2}$

$LC = KD \Leftrightarrow \angle A_1 + \angle A_1 C = KB_1 + B_1 D \Leftrightarrow \angle A_1 + \frac{BC}{2} = \frac{BC}{2} + \frac{KD}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle A_1 = \frac{KD}{2}$

$\triangle A M_2 D \sim \triangle A_1 M_1 L \Rightarrow \frac{AM_2}{A_1 M_1} = \frac{KD}{\angle A_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow M_2$ - центр тяж. $\triangle ABC$,

т.к. делит медиану $A_1 D$ в отношении $2:1$, а значит этот центр тяж.

находится на DL - бис-с $\angle ADC$. Ч.т.д.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 9

шифр

9-06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N9

Слово хорошее \Leftrightarrow в нём можно было бы выбрать 4 буквы так, чтобы получилось слово "что-то вида „аавв”".

Пример: пусть a_1, a_2, \dots, a_n — буквы алфавита, слова $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ различны. Установим, что это слова являются хорошими, и к если будем

доказать, что существует хорошее слово, состоящее хотя бы из $2n+2$ букв. Если в этом слове нет каких-то букв алфавита, то их можно добавить по однай в конец слова, откого слово не перестанет быть хорошим, но при этом уменьшит свою длину. Если какие-то буквы Пусть какая-то

буква встречается в слове, ровно один раз, тогда возможны 2 случая:

1) эта буква стоит с правом, тогда с другого правом к слову можно добавить эту же букву, откого это не перестанет быть хорошим, но уменьшит свою длину.

2) эта буква стоит в середине слова, тогда либо с какой-то стороны \rightarrow все буквы различны (тогда с другой стороны с право слова можно добавить эту же букву, что не изменит хорошесли слова), либо

либо с обеих сторон от неё есть однаковые буквы (в начале слова

слева и слова и справа). Такие однаковые буквы образуют однай и

и бывает пар однаковых букв слова и справа нет

то же буква \rightarrow тогда удалим с какой-то стороны одну из этих

букв, а с другой стороны оставшимся с право слова добавим одну

"одинаковую" букву, слово хорошим быть не перестанет и так-то буквы в нём

не изменятся; $a \dots a \dots a \dots b \dots a \dots a \dots$

удалим

пример

а если
больше 2?
как раз пример
показывает
правильн
если с залерк.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 9

шифр

9-06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N3 (продолжение)
В дальнейшем можно считать, что все буквы в слове встречаются хотя бы по 2 раза.

Всего букв в слове-речи, различающей букв - n , это означает,

что либо в слове есть буква, которая встречается хотя бы 4 раза, (1)

либо есть 2 буквы, которые не встречаются хотя бы по 3 раза. (2)

1) В таком случае между 2-ими и 3-ими позициями этой буквы

есть какая-то буква : ... а ... а ... б ... а ... а ...

но буква "б" встречается в слове ещё раз, если она встречается сюда,

то образуется последовательность „ббаа“, а если справа – „аабб“;

то противоречит „хорошести“ этого слова.

2) В таком случае эти две буквы, встречающиеся по 3 раза,

кардинально „хорошест“ слова.

а а а б в в
а а в а в в
а а в в а в
а а в в в а
а в а а в в
а в а в а в
а в в а а в
а в в а в а
а в в в а а

– все случаи расположения этих 6 букв
(точнее 10 получаются заменой „а“ ↔ „б“),
в которых случаи „хорошести“ кардинально

Итак, мы показали, что из хорошего слова длиной хотя бы $2n+2$

можно сделать новое хорошее слово, не уменьшая кол-во букв, в

котором все буквы дифференцируются хотя бы по 2 раза, и

показали, что это новое хорошее слово не может существовать,

зная что, исходные предположения неверны и в исходном хорошем слове есть

хотя бы две буквы $2n+1$ букв.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика

класс 9

шифр

9 - 06

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№9 (продолжение 2)

Пример: пусть a_1, \dots, a_n — буквы алфавита.

Рассмотрим слово $\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_n \underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_n$, в котором имеются холмы, т.к.

для любой пары однаковых букв слова от неё все буквы различны и
справа от неё все буквы различны.

Ответ: $2n+1$

Н/0