

# ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА  
(заполняется оргкомитетом)

9-10

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ

(ДД.ММ.ГГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

05 . 02 . 2021

ВТОРОЙ ДЕНЬ

06 . 02 . 2021

ФАМИЛИЯ ПУПЫШЕВ

ИНИЦИАЛЫ В . А .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО) 9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ 9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня, титульный лист не считается):

8

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	0	7	-	7	7	7	1	-	43

Председатель жюри:  /И.С. Рубанов/

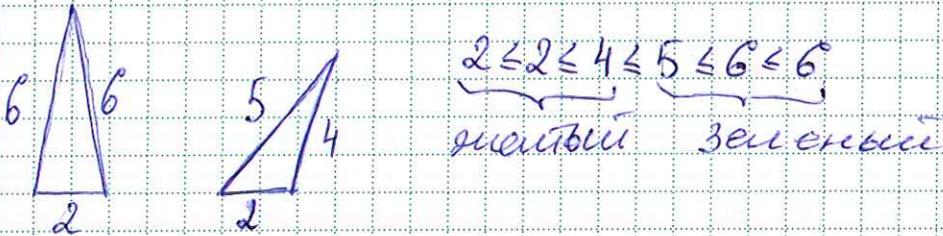
предмет Математика класс 9 шифр 9-10

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

н 9.1

Нет, не обязательно.

Пример:



Желтый треугольник должен будет состоять из палочек длины 2, 2 и 4, а такого быть не может.  
 $\Rightarrow$  не всегда из желтых палочек можно составить треугольник  $\rightarrow$  нет, не обязательно.

н 9.2

$x, y \neq 0$

$$\begin{cases} x^2 - x > y^2 \\ y^2 - y > x^2 \end{cases}$$

сложим оба неравенства:

$$\begin{aligned} x^2 - x + y^2 - y &> x^2 + y^2 \\ -x - y &> 0 \end{aligned}$$

$x + y < 0 \Rightarrow$  минимум 1 из чисел  $x$  и  $y < 0$ .

1) пусть  $x > 0$ , тогда

если  $x + y < 0 \Rightarrow x < -y$ ,  $x > 0 \Rightarrow |x| < |y| \Rightarrow x < y^2$

$\Rightarrow y^2 - x > x^2 - x > y^2 \Rightarrow y^2 - x > y^2$ ,  $x > 0 \Rightarrow$  противоречие

$\Rightarrow x < 0$  (т.к.  $x \neq 0$ )

2) выражения симметричны для  $x$  и  $y \Rightarrow$  аналогично доказывается, что  $y$  не может быть положительным.

$x < 0$  и  $y < 0 \Rightarrow xy > 0$

(т.к.  $x, y \neq 0$ )

Докажем, что это возможно (проверка)

пусть  $x = y = -1$   
 $(-1)^2 - 1 > (-1)^2$ ,  $(-1) \cdot (-1) > 0$     Ответ:  $xy > 0 \Rightarrow +$

предмет математика класс 9

шифр 9-10

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№9.3.

$a, b, c, k \in \mathbb{N}$

$k < a$  и  $k < b$

1)  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow ab + c^2 : a+b \Rightarrow ab + c^2 \equiv 0$

$$a \equiv -b \Rightarrow \frac{ab}{a+b} \equiv \frac{-b^2}{a+b} \Rightarrow \frac{ab + c^2}{a+b} \equiv \frac{c^2 - b^2}{a+b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{a+b} \equiv \frac{b^2}{a+b} \Rightarrow \frac{c^2}{a+b} \equiv \frac{b^2}{a+b} \Rightarrow c \equiv b \vee c \equiv -b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a+b} \equiv \frac{b}{a+b} \vee \frac{c}{a+b} \equiv \frac{-b}{a+b}$$

$b$  и  $a < a+b \Rightarrow \underline{c \geq a}$  и  $c \geq b$

2)  $k < a \Rightarrow a > \frac{ab + c^2}{a+b} \mid \cdot a+b \neq 0$

$$a(a+b) > ab + c^2$$

$$a^2 + ab > ab + c^2$$

$$a^2 > c^2, \text{ а } a, c > 0 \Rightarrow \underline{a > c}$$

$k < b \Rightarrow b > \frac{ab + c^2}{a+b} \mid \cdot a+b \neq 0$

$$b^2 + ab > ab + c^2$$

$$b^2 > c^2 \Rightarrow \text{т.к. } b, c > 0, \text{ то } \underline{b > c}$$

$$\left. \begin{array}{l} a > c \\ b > c \\ c > a \\ b > b \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ пункта} \\ 1 \text{ пункт} \end{array}$$

$\Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow$  таких чисел

$a, b, c$  и  $k$  не существует в натур. числах

Ответ: таких чисел не существует в  $\mathbb{N}$ .

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика класс 9 шифр 9-10

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

О - центр  $\omega$  и  $\Omega$ .

1)  $K$  - точка пересечения касательных к  $\omega$  и  $\Omega$ , проходящих через  $A$  и  $B$ .

$KA = KB \Rightarrow K$  - лежит на пер. пер. к  $AB$ .

$A, B$  - лежат на окр. с  $\omega$  и  $O$   
 $\Rightarrow O$  - лежит на пер. пер. к  $AB$   
 $\Rightarrow OK$  - пер. пер. к  $AB$

2)  $KB$  - кас. к  $\omega \Rightarrow OB \perp KB \Rightarrow \triangle OKB$  - прямоугольн и  $BM$  в нем - высота  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow OK \cdot KM = BK^2 \Rightarrow OK = \frac{BK^2}{KM}$

3)  $KC \cdot KD = AK^2$  (от точки  $K$  отн.  $\Omega$ )  
 $AK = BK \Rightarrow KC \cdot KD = BK^2 \Rightarrow KC = \frac{BK^2}{KD}$

4) Рассмотрим  $\triangle KMC$  и  $\triangle KOD$ . Докажем, что они подобны.

$\angle OKC$  - общий

$$\frac{KC}{OK} = \frac{BK^2}{KD} = \frac{KM}{KD} \Rightarrow \frac{KC}{KM} = \frac{OK}{KD} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle OKD \sim \triangle KMC \Rightarrow \angle KMC = \angle OKD \Rightarrow$   
 $\Rightarrow M, O, D, C$  - вписанный  $\Rightarrow$  окр. описанная  
и  $CM$  проходит через центр  $\omega$ .

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика класс 9 шифр 9-10

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~ 9,8

$M_1$  - т. перес. мед.  $ABD$ .  
 $M_2$  - т. перес. мед.  $ABC$ .  
 $K$  - середина  $AC$ .  
 $T$  - середина  $BD$ .  
 $C_1$  - т. перес. бисс.  $\angle BCD$  и  $AD$  (прямой).  
 $D_1$  - т. перес. бисс.  $\angle ADC$  и прямой  $BC$ .  
 $O$  - т. перес. бисс.  $\angle ADC$  и  $\angle BCD$ .  
 $M_2$  - т. перес.  $BK$  и  $AD_1$ .

1)  $KT$  - ср. линия трап.  $ABCD$ .  
 $CC_1$  - бисс.  $\angle BCD$ ,  $ABCD$  - трап.  $\Rightarrow ACC_1D$  - р/д.  $\Rightarrow$   
 $CC_1$  и  $DD_1$  - бисс. односторонних углов трапеции  
 $\Rightarrow \angle CDD_1 = 90^\circ \Rightarrow CC_1 \perp DD_1$ ,  
 $ACC_1D$  - р/д  $\Rightarrow CO = C_1O$ .  
 Аналогично  $ABDD_1$  - р/д  $\Rightarrow D_1O = DO$ .  
 $\Rightarrow O$  - лежит на ср. линии  $ACC_1D$   $\Rightarrow$  на ср. линии  $ABCD$   $\Rightarrow K, O, T$  - прямая.

2)  $\triangle AC_1M_1$  и  $\triangle TOM_1$ :  $\angle OC_1T = \angle AM_1O$   
 $\angle AC_1M_1 = \angle M_1OT$  ( $KT \parallel AD$ )  
 $\Rightarrow \triangle AC_1M_1 \sim \triangle TOM_1 \Rightarrow \frac{AC_1}{TO} = \frac{AM_1}{M_1T} = 2$  ( $M_1$  - т. перес. медиан  $\triangle ABD$ )

3)  $TO$  - ср. линия  $\triangle BDD_1 \Rightarrow BO = 2TO = AC_1$   
 $OK$  - ср. линия  $\triangle ACC_1 \Rightarrow OK = \frac{1}{2} AC_1 = \frac{BO}{2}$

4)  $\triangle BD_1M_2$  и  $\triangle KOM_2$ :  $\angle BD_1M_2 = \angle KOM_2 \Rightarrow \triangle BD_1M_2 \sim \triangle KOM_2$   
 $\angle BD_1M_2 = \angle M_2OK$   
 $\Rightarrow \frac{BM_2}{M_2K} = \frac{BD_1}{OK} = 2$   
 $\Rightarrow BM_2 = 2M_2K \Rightarrow$  т.к.  $M_2$  - лежит на  $BK \Rightarrow$   
 $\Rightarrow M_2$  - т. перес. медиан  $\triangle ABC$ .  
 $M_2$  - лежит на бисс.  $\angle ADC$  (по построению)

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика класс 9 шифр 9-10

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~~Оценка.~~

~~Если все 30 цифр нечетные, тогда рассмотрим на последние цифры 3-х чисел.~~

~~У  $a$  и  $b$  - они нечетные  $\Rightarrow$  когда мы сложим  $a$  и  $b$ , то получится четное число. Сумма должна быть четной.~~

~~Оценка.~~

~~Если все 30 цифр нечетные  $\Rightarrow a, b$  и  $c$  - нечет. числа (их несл. цифры нечетные)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow a + b = c$ , такого очевидно быть не может.  
нет чет. чис.~~

~~$\Rightarrow$  неч. цифр  $\leq 29$ .~~

~~Пример на 29:~~

$$\begin{aligned} 19999999999 + 19999999999 &= 2 \cdot 20000000000 - 2 = \\ &= 39999999998 \end{aligned}$$

~~8 - единственная четная цифра.~~

предмет Математика класс 9 шифр 9-10

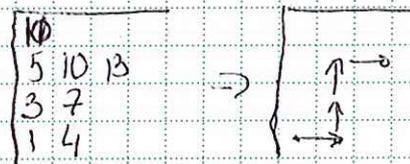
Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№9,7  
Рассмотрим произвольную таблицу (заполненную) и докажем, что 2 такие угловые клетки есть.

Построим ориентированный граф на 81 вершине, так чтобы каждой клетке соотв. 1 вершина, а ребро проводилось если различие двух соотв. чисел = 3 (от меньшего к большему)

Для удобства каждую вершину поместим в центр соотв. клетки (это очевидно ни на что не влияет)

Заметим, что у всех вершин (кроме 1, 2, 3, 81, 79, 80) есть 1 входящее и 1 выходящее ребро



пример построения графа

у 1, 2, 3 - только 1 ребро и оно выходит

у 79, 80, 81 - только 1 ребро и оно входит.

⇒ весь граф разбивается на 3 ориентир. пути.

Заметим, что в каждой пути все числа сра. вышше по модулю 3.

Каждая вершина пути ровно на 3 больше предыдущей.

все 81 число разбитое на 3 пути по mod 3 ->

⇒ длина каждого пути 27

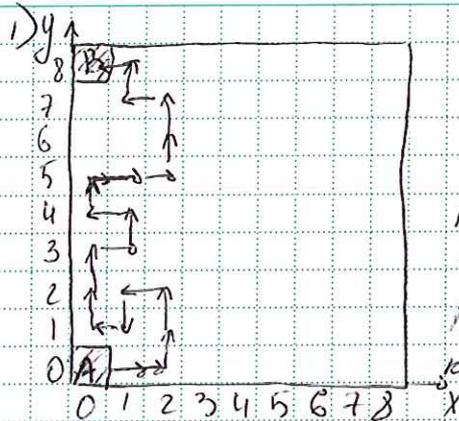
Рассмотрим 4 клетки в вершинах диагональ. Минимум 2 из них сравнимы по mod 3 (по пр. Дирихле) ⇒ они находятся в одной пути.

Рассмотрим 2 случая 1- эти вершины находятся в одной строке и столбце.

2- эти вершины противоположны (лежат на диагонали)

предмет математика класс 9 шифр 3-10

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



пусть без огр обидусется  
эти клетки раскрас. Вот так,  
пусть без шело  $A < B$ .

Рассмотрим часть пути между  
A и B.

Введем систему координат. (в  
клетка A - нач ось (в  
клетке)

$A(0,0)$

$B(0,8)$   $\Rightarrow$  Если идти по той же пути, то т.к.

коорд  $x$  не изм.  $\Rightarrow$  вправо ребер столько же  
сколько и влево  $\Rightarrow$  их сумма кал-во четное.

коорд  $y$  увелич. на 8  $\Rightarrow$  ребер вверх на 8  
больше чем вниз  $\Rightarrow$  их тоже четное кал-во.

$\Rightarrow$  всего ребер между A и B - четное кал-во  
(пусть  $2k$ )  $\Rightarrow B = 2k + A \Rightarrow B - A = 2k \therefore 6$

2) Повторим ~~аналогично~~, но у A  $(0,0)$   
также же раскрасим клетки, но у B коорд.  
 $(8,8)$ , а у A так же  $(0,0)$

$\Rightarrow$  ходов (ребер) вправо на 8 больше чем влево  
ходов вверх (ребер) на 8 больше чем вниз

общее кал-во ребер так же четно  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  разность A и B  $\therefore 6$

$\Rightarrow$  Ответ: да, обязательно.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

9

шифр

9-10

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Оценка / на  $2n+1$  букву / №9.9

1407. Пусть ~~слово~~ есть слово с  $2n+2$  букв.

1) если буква, которая повторяется ~~минимум~~ 3 раза (иначе ~~максимум~~ букв  $2n$ )

Рд: рассмотрим букву  $a$ , которая встречается 3 раза и сотрем столько  $a$ , чтобы их стало 3.

Мы стираем только  $a$  (возможно ничего)  $\rightarrow$  никакие 2 буквы  $a$  рядом не стоят

Пример на  $2n+1$  букву

буквы обозн. цифрами  $1 \dots n$

пример:  $123 \dots n1n \dots 321$

нет чисел вида  $11$   $aa$   $1aa11$ , т.к. между цифрами 1 нет повт. чисел

нет чисел вида  $aa$   $bb$ , т.к. в примере если  $a > b$ , то они располагаются

$\dots b \dots a \dots a \dots b \rightarrow$  нельзя стереть цифры так, чтобы осталось слово вида  $aa$   $bb$ .

Оценка: