

# ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА  
(заполняется оргкомитетом)

9 - 11

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ

(дд.мм.гггг.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

0 5 . 0 2 . 2 0 2 1

ВТОРОЙ ДЕНЬ

0 6 . 0 2 . 2 0 2 1

ФАМИЛИЯ ТИХОНОВ

ИНИЦИАЛЫ К . О .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО)

9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ

9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня,  
титульный лист не считается):

8

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	7	7	-	7	7	7	7	0	56

Председатель жюри: И.С. Рубанов/

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА

класс 9

шифр

9-11

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N1

Пусть есть палочки длии 1, 1, 3, 3, 3, 3. Первый раз он может составить из 2 треугольника со сторонами 1, 3, 3 m.k.  
 $3+1>3$     $3+3>1 \Rightarrow$  иер-ко треугольника выполняется.

+

После этого если он берёт 3 самые короткие палочки

(1, 1, 3), то треугольник не получится т.к.  $1+1<3 \Rightarrow$  иер-ко

треугольника не выполняется  $\Rightarrow$  он не всегда сможет составить

Эти 2 треугольника

N2  $x^2 - x > y^2$     $y^2 - y > x^2$  при  $x = -1$   $y = -1$

+

$(-1)^2 - (-1) = 2 > (-1)^2 = 1 \Rightarrow x = -1$  и  $y = -1$  подходит

в данном случае  $xy = 1 > 0 \Rightarrow$  знак  $xy$  может быть +

$x^2 - x > y^2$   
 $y^2 - y > x^2 \Rightarrow x^2 - x + y^2 - y > x^2 + y^2 \Rightarrow x + y < 0$

Пусть  $xy < 0 \Rightarrow$  без ограничения общности  $x < 0, y > 0$

$x + y < 0 \Rightarrow |x| > |y| \Rightarrow x^2 > y^2$     $y^2 - y < x^2$  m.k.  $y > 0$

$y^2 - y = |y|^2$     $|y| \Rightarrow |y|(|y| - 1)$

но условие  $y^2 - y > x^2 \Rightarrow y^2 > x^2$  противоречие  $\Rightarrow$

$\Rightarrow x$  и  $y$  одного знака  $\Rightarrow xy > 0$

N3  $a = 10$     $b = 15$     $c = 5 \Rightarrow k = \frac{10 \cdot 15 + 5^2}{10 + 15} = \frac{175}{25} = 7 < 10 < 15$

$a+b = 25 \Rightarrow a+b$  имеет 3 делителя: 1, 5, 25

Доказать что  $a+b$  не может иметь 2 делителя.

Пусть  $a+b$  имеет 2 делителя  $\Rightarrow a+b$  простое  $a+b=p$

$a \equiv -b \pmod p$     $ab + c^2 : a+b \Rightarrow ab + c^2 \stackrel{p}{=} 0 \Rightarrow c^2 - b^2 \stackrel{p}{=} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2 \equiv b^2 \pmod p$     $\frac{ab + c^2}{a+b} < a \nmid b \Rightarrow ab + c^2 < a^2 + ab \Rightarrow c^2 < a^2 \Rightarrow c < a$   
m.k.  $c > 0$  и  $a > 0$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

5-11

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

аналогично  $c < b$   $a < p, b < p \Rightarrow c < p$   $a > 0, b > 0, c > 0$

$b^2 \equiv c^2 \pmod{p} \Rightarrow b \equiv c \pmod{p} \vee b \equiv -c \pmod{p}$  т.к.

Пусть  $b^2 \equiv c^2 \pmod{p} \Rightarrow b^2 - c^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (b-c)(b+c) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow b-c \equiv 0 \pmod{p} \vee b+c \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow b \equiv c \pmod{p} \vee b \equiv -c \pmod{p}$

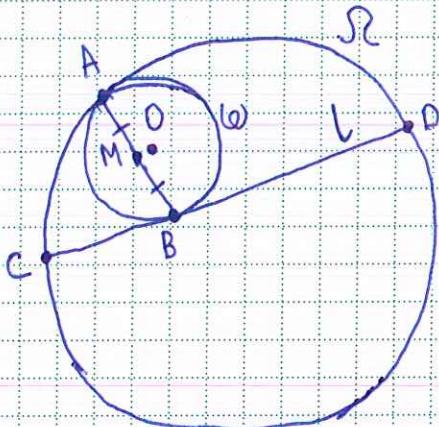
б) 1)  $b \equiv c \pmod{p}$   $b < p < p \Rightarrow b = c$  противоречие  $b > c$

2)  $b \equiv -c \pmod{p}$   $b < p < p \Rightarrow b = p - c \Rightarrow a = c$  против.,  $a > c$

$\Rightarrow a+b \neq p$

$\Rightarrow$  умножая  $a+b$  мин 3 делители т.к. у любого числа мин 2 делителя и  $a+b$  - не простое. Пример на 3 делители в начале.

№4



O - центр (Ω)

Сделаем инверсию относ. окр.

(ε). Нам нужно было доказать, что C, M, O, D лежат на одной

окружности  $\Rightarrow$  т.к. O - центр (ε)

точка инверсии чистко будет

доказать, что C, M, D лежат на одной окружности т.к. если они лежат на одной прямой, то точка инверсии они будут лежать на одной окр. проходящей через O.

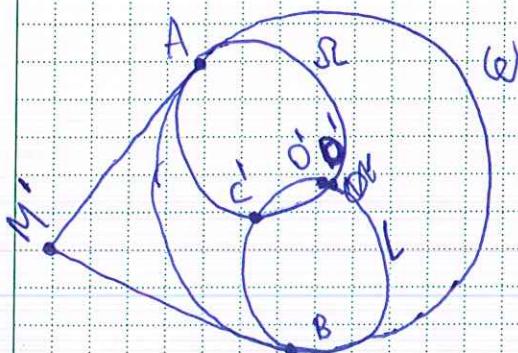
Новые инверсии A и B останутся

на своих местах, O' центр (ε)

точка инверсии. Пряная BСD проходит

через O' и касающаяся (ε) в точке B

SL касается (ε) внутренним образом



РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет МАТЕМАТИКА класс 9 шифр 3-11.

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

в точке A и пересекает образ CD в точках C' и D'.

Точка M до инверсии лежала на середине хорды AB. OM ⊥ AB т.к.

M-середина хорды  $\Rightarrow$  если A и B останутся на месте M все еще

лежат на сер.пере к AB  $\Rightarrow$  прямая AMB пересекла окружность  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  AB A O' B M' - вписаный и M' лежит на сер.пере к AB как и

O'  $\Rightarrow$  A O' B M' - гольмо  $\Rightarrow \angle M' B O' = \angle M' A O' = 90^\circ \Rightarrow M' A \perp M' B$

касательные к (e). Рассмотрим рад. центр окружностей

6) S2 и образ прямой CD, она лежит на касательной к (e)

в точке A т.к. это рад.оси (e) и образ CD также он лежит на рад.оси (e) и S2  $\Rightarrow$  на касательной к (e) в точке B,  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  он лежит на пересечении этих 2 касательных  $\Rightarrow$  рад.центру

точка M'. Так же рад.центр лежит на общей хорде

(e), S2 и образа CD. Эта хорда C'D'  $\Rightarrow$  M' лежит на прямой

C'D'  $\Rightarrow$  M', C', D' лежат на одной прямой, что и требовалось.

$\Rightarrow$  после инверсии M'C'D' будут лежать на окружности проходящей через O, что и требовалось доказать.

7)

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-11

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N<sup>6</sup>

Пример:  $\begin{array}{r} 355555555 \\ + 355555555 \\ \hline 711111110 \end{array} = a$  видно, что 29 из 30 цифр  
 $\begin{array}{r} 355555555 \\ + 355555555 \\ \hline 711111110 \end{array} = b$  нечетные

Решение: Рассмотрим  $a+b \equiv c$  по модулю 10  $a+b \equiv c \pmod{10}$

$a+b+c$  по модулю 10 - это их последние цифры.

Если  $a \equiv 2 \pmod{2}$  и  $b \equiv 2 \pmod{2}$ , то  $a+b \equiv 2+2 \equiv 4 \pmod{2}$  если число делится на 2, то и его последние цифры  $\equiv 2 \pmod{2}$

Если  $a \equiv 2 \pmod{2}$  и  $b \not\equiv 2 \pmod{2}$ , то  $a+b \not\equiv 2 \pmod{2} \Rightarrow C \not\equiv 2 \pmod{2}$   $\Rightarrow$  макс 2 последние цифры из 3

Если  $a \not\equiv 2 \pmod{2}$  и  $b \not\equiv 2 \pmod{2}$ , то  $a+b \not\equiv 2 \pmod{2}$  числа  $a, b, c$  - нечетные

$\Rightarrow \min 1$  четна  $\Rightarrow$  все 30 цифр не могут быть нечетными

Ответ: 29 цифр

N<sup>7</sup> Рассмотрим клемку где стоит число 1. Рядом с ним данное

стоит 4, с ч рядом 7 и т.д. Понял построим путь от 1

до 79 по клемочкам (каждый раз идем на соседнюю по стороне клемку) Каждый раз число увеличивается на 3.

Мы можем так сделать т.к если начнем с 1 или скажем

каждый раз делать шаг на число большее на 3 по условию

задачи и так каждый раз увеличивая число на 3 попадем в клемку

с числом 79. Аналогично получим пути из 2 в 80 и из 3 в 81.

Вопрос, что эти 3 пути проходят по всем клемочкам доски.

т.к если число имеет остаток 1 или 2 по мод 3, то до него

можно добраться из клемки 1 или 2 соответственно, а

если остаток 0, то из клемки 3, Каждый раз на пути

число увеличивается на 3  $\Rightarrow$  мы можем пройти через все

числа имеющие данный остаток по мод 3. От 1 до 79, 2 до 80 или

3 до 81. Вопрос, что удастся клемок всего 4  $\Rightarrow$  хоче бы 2 из них

+

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-11

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

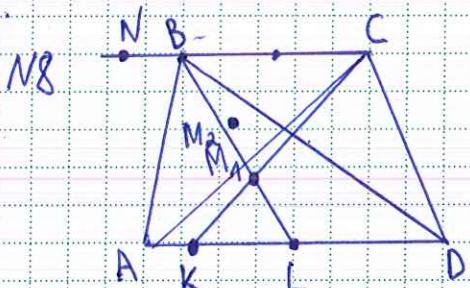
прилагаем одинаку пути  $\Rightarrow$  до них можно от одной из них можно дойти до другой ступни на соседние клетки увеличивая число на 3. Раскраска квадрата с максимальную раскраску.

Замечаем, что все узловые клетки одного цвета  $\Rightarrow$  чтобы добраться от одной узловой клетки до другой нужно сделать чётное число ходов т.к. каждый ход цвет клетки изменяется.

$\Rightarrow$  в 2 найденных квадратах разность чисел четных и на 6

т.к. мы чётное число раз цвета изменили. Оно изменило на 3  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  разность делится на 3 и на 2  $\Rightarrow$  делится на 6



M<sub>1</sub>-точка пересечения медиан

треугольника ABD. K-точка пересечения CM<sub>1</sub> и AD. L-середина AD.

Известно, что  $\frac{BM_1}{ML} = 2$  т.к. M<sub>1</sub>-центр траingle

BC || KL  $\Rightarrow$   $\triangle BCK$  по теореме орангина  $\frac{BM_1}{ML} = \frac{BC}{KL} \Rightarrow KL = \frac{1}{2} BC$

LD =  $\frac{1}{2} AD \Rightarrow KD = \frac{1}{2} (AD + BC)$ , M<sub>2</sub>-центр траingle ABC

N-точка пересечения DM<sub>2</sub> и BC. Аналогично CN =  $\frac{1}{2} (AD + BC)$

Утверждается, что CM<sub>1</sub>-биссектриса угла BCD.  $\Rightarrow \angle BCK = \angle DCN$

$\angle BCK = \angle CKD$  т.к. BC || AD  $\Rightarrow \angle BCK + \angle KCD = \angle CKD \Rightarrow CK = KD$

KD = CN  $\Rightarrow$  CN = CD  $\Rightarrow \angle CND = \angle NDC$ ,  $\angle CND = \angle NDA$  т.к.

CB || AD  $\Rightarrow \angle NDC = \angle NDA \Rightarrow DN$ -биссектриса ADC. DN проходит

через M<sub>2</sub> центр траingle ABC, что и требовалось.

+

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

9-11

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

N9 Ответ:  $2n+1$  Буквы:  $1, 2, \dots, n$

Пример:  $1, 2, 3, \dots, n, 1, 2, 3, \dots, n, 1$

В примере после того как появляются 2 одинаковые буквы (если идти с лева направо) дальних буквы не повторяются.

Также если мы находим 2 одинаковые буквы, то и после них

больше нет одинаковых  $\Rightarrow$  пример работает

~~Очевидно: Соседние одинаковые буквы отрезки. Если отрезок~~  
~~букв длиной більше  $> 2$ , то буквы соседи по следованию.~~

~~букву будем соединять с самой левой такой же стоящей~~  
~~с лева от неё. Например для строки  $abacaba$  будем~~  
~~проводить 3 отрезка.~~

~~$\Rightarrow$  если какой-то букви  $k$ , то будем проводить  $k-1$  отрезок~~  
~~соседствующих одинаковых букв. Важно!, что одна буква может~~  
~~быть началом или концом 2 отрезков,~~

~~Рассмотрим в слове использовано  $x$  букв и его длина  $L$ , тогда~~  
~~будет проведено  $L-x$  отрезков т.к. каждый из  $L$  букв~~  
~~делит отрезков на один меньше чем или на  $=$  этой букви, а сумма~~  
~~количество букв  $-1$   $\Rightarrow$  Рассмотрим длина слова  $L > 2n+1$~~   
 ~~$\min 2n+2$ . Буквы использовано  $\max n \Rightarrow$  отрезков в максимуме~~

~~приведено  $\min 2n+2 - n = n+2 \Rightarrow$  проведено~~

~~буквы использовано  $\max n \Rightarrow$  отрезков проведено  $\min L-n$ .~~

~~$\Rightarrow$  начало и конец  $2L-2n$  букв  $L \Rightarrow$  хотели бы 2 пары начал~~

~~и концов совпадают т.к. вторая буква не может начинаться~~

~~Более 1 отрезка и кончается более одной отрезка иначе~~

# **РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ**

## предмет

# МАТЕМАТИКА

## класс

g

## шифр

9-11

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~~Synt. grammar~~ Sums  $\vdash n \min \{(-n) \circ 2 - 1\} > l$  m.k

$$(-n) \cdot 2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \leq -\frac{1}{2}$$

~~Поясните что не удачна заготовка изображена в отрезке хран.~~

~~Отрезков с одинаковыми буквами должны пересекаться в  
одном и том же порядке. Все буквы кроме концов этих отрезков  
остановятся на мб фига AABD.~~

Очевидно, любое число из  $\{1, 2, \dots, n\}$  можно представить в виде суммы не более чем  $n+1$  единиц.

1) оголій буфет  $\geq 4$

2)  $\text{g}_{\text{hyp}} \geq 3$   $\text{g}_{\text{hyp}} = \max 2n+1 \text{ m.k}$

Еще одна гипотеза: неявная Syab max.  $2(n-1)+3 = 2n+1$

1) mycne Symbole 0 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

мысль 2 неизвестна

на пускуне из  $\mathcal{A}$ . Старт менеджер калес  $K \geq 1$  группе дыск.  $\mathcal{H}o$ са

Все эти символы различны и в одинаковой мере способствуют  
сочетанию двух языковых систем в рамках единого языка.

maxme разрешение m.k. Могено бы брати 2 правые а и их не соединять с буквами между этими группами а то моя же машине, якшанымо права от этих групп а  $\Rightarrow$  символов максимум от 2 max.

$k + (n-1-k) \cdot 2 = 2n - k - 2$   $(n-1-k)$  - бозижончисиз сурʼи не сабнагандай-

ux car u k menegy gbyne a. Eanu a Sano Sambu 4, mo

Умножим обе части неравенства на  $k$ , получим

conservs. negligr.  $\Rightarrow$  bico Symb  $\max_{x \in \mathbb{R}} 2n-k-2+4+x = 2n+2-k+x$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

МАТЕМАТИКА

класс

9

шифр

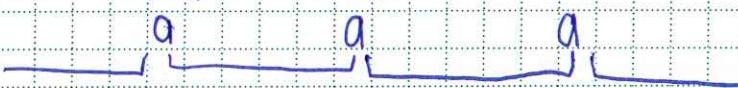
9-11

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

$$\leq 2n+1 \text{ м.к } k \geq n+1$$

$\Rightarrow$  в 1-ом случае длина строки  $\leq 2n+1$

2)  $\oplus$  пусть букв  $a$  в равно кол-во сколько их больше, то это  
предыдущий случай



рассмотрим и отрезка как комуто все делам а строку

а кратные возможные длины 0.

для в 2-ом отрезке стоять не могут т.к тогда  
с одной стороны от них две а  $\Rightarrow$  можно будет стереть.

Важней, что две в стоят с одной стороны от центральной

а по принципу Дирихле  $\Rightarrow$  с другой стороны от центр. а есть  
еще одна а  $\Rightarrow$  можно будет стереть  $\Rightarrow$  данный случай

в данном случае строка не может быть пустой.

Мы предположили, что длина первой строки может быть

больше  $2n+1$  и получили 2 случая. В одном из которых строка

всё еще не может быть пустой и больше  $2n+1$ , а во втором

просто не может быть пустой  $\Rightarrow$  длина строки  $\leq 2n+1$

N.10 Рисунок 1 - это шаг арифметической прогрессии или как-то  
то  $n$  существует таких прогрессии.

Рисунок есть  $n$  чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n$

рассмотрим все  $n-1$  НОК с  $a_1$ . Важней, что все они  
делаются на  $a_1$ .

(1)