

# ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

## РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

Заполнять ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по образцам

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 , -

1. Заполните поля «фамилия», «инициалы», «класс» на титульном листе, если они не заполнены.

ШИФР КОМПЛЕКТА  
(заполняется оргкомитетом)

9-02

ПРЕДМЕТ

МАТЕМАТИКА

ДАТА ПРОВЕДЕНИЯ  
(ДД.ММ.ГГГ.)

ПЕРВЫЙ ДЕНЬ

05 . 02 . 2021

ВТОРОЙ ДЕНЬ

06 . 02 . 2021

ФАМИЛИЯ УСАТОВ

ИНИЦИАЛЫ П . В .

КЛАСС, В КОТОРОМ ВЫ УЧИТЕСЬ (ЧИСЛО) 9

КЛАСС, ЗА КОТОРЫЙ ВЫ УЧАСТВУЕТЕ В ОЛИМПИАДЕ 9

2. ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ (заполняется после второго дня,  
титульный лист не считается):

18

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ (заполняется жюри)

Номера задач	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма баллов
Результат	7	7	6	0	0	7	7	7	5	0	46

Председатель жюри:  /И.С. Рубанов/

предмет Математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№1.

~~Предположим, что оселку не удалось соста-~~  
~~вить новые префиксы, тогда разложить~~  
~~длины строк по возрастанию:  $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$ .~~

+

Ответ: нет, не обязательно.

Пример: пусть означать оселки составили  
префиксами со строчными  $1, 5; 100; 101$  и

$49, 54, 102$  соответственно. Тогда  $1, 5; 49, 54$

оказались в желтой, остальные - в зеленой.

Пусть  $\varphi$  как есть положительное длины строк префиксов.

Заметим, что если мы обозначим строчные  
префиксы  $\varphi$  за  $a, b, c$  ( $a \leq b \leq c$  без учета

общ.), то если он равен составлен тогда

и только тогда, когда ~~выполняются следующие нерав-~~  
~~ности~~  $b \geq a, c > 0, b \leq a \leq c$ , что очевидно

т.к.  $c \geq b, a > 0, a \leq b + a, m = e$

только последние пер-во необходимо и достаточ-

но. Тогда заметим, что первые составленные

префиксами составили т.к.  $1, 5 + 100 = 101, 5, 101,$

$49 + 54 = 103 \geq 102$ , а префиксы из желтой

реконструировали т.к.  $1, 5 + 49 = 50, 5 < 54,$

предмет Математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№2.

Ответ:  $xy > 0$  (положительный).

Пример:  $x = -1, y = -1, xy = 1 > 0$

$$x^2 - x > y^2 \Leftrightarrow 2 > 1, \text{ верно}$$

$$y^2 - y > x^2 \Leftrightarrow 2 > 1, \text{ верно}$$

+

Предположим, что  $xy < 0$ .

Тогда без ограничения общности  $x > 0, y < 0$ .

Тогда  $x > 0 > y$  ( $x \neq 0, y \neq 0$  по условию).

Из  $x^2 - x > y^2$  получаем:  $|y| < \sqrt{x^2 - x}$

( $x^2 - x > 0$  т.к.  $y^2 \geq 0$ , а  $x^2 - x > y^2$ )

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x} + x^2 - x > x^2$  (подставим  $y$  в II

пер. вб)  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} > x \Leftrightarrow x^2 - x > x^2$

$\Rightarrow 0 > x \Rightarrow$ , что  $\phi$  т.к.  $x > 0$  и  $x^2 - x > 0$ .

$xy \neq 0$  т.к. по условию  $x \neq 0, y \neq 0$ .

предмет Математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№3.

~~Ответ: 3.~~

~~Пример:  $a=2, b=2, c=2$ :  $\frac{ab+c^2}{a+b} = \frac{4+4}{4} = 2$~~

Ответ: 3.

Пример:  $a=10, b=15, c=5$ :  $\frac{ab+c^2}{a+b} = \frac{150+25}{25} = 7, 7 < 10$   
 $\frac{ab+c^2}{a+b} = \frac{150+25}{25} = 7, 7 < 15$

Действительно,  $a+b=25$  3 делителя: 1, 5, 25.

Предпоположим, что число делителей меньше, тогда число имеет  $\leq 2$  делителя  $\Rightarrow$  оно либо простое, либо 1. ~~Случай 1, но т.к.~~

Таслотуны ~~поменьше~~ из  $a$  и  $b$  число.

В т.к. выражение симметрично ~~к~~  $a$  и  $b$ .

будет  $a$ . Тогда по условию т.к.  $a > k$ .

$\frac{ab+c^2}{a+b} \leq a \Leftrightarrow \frac{ab+c^2}{a+b} \leq a \Leftrightarrow ab + a^2 \geq ab + c^2 \Leftrightarrow a^2 \geq c^2 \Leftrightarrow a \geq c$   
 $(a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b \geq 2 \Rightarrow ka \leq ab \text{ верно } \circ)$

$\Rightarrow a^2 \geq c^2 \Rightarrow$  т.к.  $a, c \in \mathbb{N}$   $a \geq c \Rightarrow$

$\Rightarrow$  т.к.  $a \geq b \geq c$

Предположим, что  $a+b = p$  ( $p$ -простое).

Тогда  $a < p, b < p$  т.к.  $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow ab \not\equiv p, c < a \Rightarrow c \not\equiv p$ . Тогда

$ab + c^2 \equiv p$  т.к.  $a+b = p \Leftrightarrow a(p-a) + c^2 \equiv p \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c^2 \equiv a^2 \Leftrightarrow (a-c)(a+c) \equiv 0 \Rightarrow \begin{cases} c=p-a \Rightarrow c \neq b, p \\ c=a, p \end{cases}$

предмет

Математика

класс

9.

шифр

9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№ 3 (продолжение)

Еще  $a+b \neq p$ , то  $a+b=1$ , так как  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a+b \geq 2, \text{ д.}$

Тогда мы пришли к противоречию из нашего предположения  $\Rightarrow$  оно неверно.

№ 5.

Предположим, что после некоторого хода поправились, что на доске ~~остались~~ остались

только вертикаль замешена лишь в чёрной, или в белой. Тогда

я утверждаю, что выиграет II или

сейчас бел ход. Он ~~не~~ может ходить

он будет замешивать вертикаль ~~на~~ в чёрной. Заметим, что если ~~на~~  $n$  ходов (или вертикалей  $n$ ), а так как

ходов I  $n-1$ , тогда ~~т.е.~~ каждая фигура ~~будет~~  $\in 1$  или  $\in 2$  клетки ~~столбца~~, то перед ходом II будет из вертикалей

потому что он ~~не~~ может замешивать  $\in n-1$  клетки замешивать  $\Rightarrow$  он ~~сможет~~ сделать ход,

тоже  $n$ -клет. хода ~~и~~ выиграет замешивая  $\Rightarrow$  I выиграет.



предмет математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

№6.

Ответ: 29.

Пример:  $a = 199999999999$ ,  $b = 399999999999$

Все цифры, кроме последней у  $c$ , нечётные.

+

Предположим, что все 30 цифр неч, тогда неч и последние цифры у  $a, b, c$ ,

тогда  $a, b$  и  $c$  все неч, но  $a \cdot b = c$ ,

а т.к.  $a$  и  $b$  неч  $a \cdot b = \text{чёт} \neq \text{неч} = c$ .

~~№7.~~

~~Ответ: да, найдутся, обозначим  $x$  за  $x$~~

~~Заметим, что  $x$  из чисел, стоящих в каждой клетке таблицы будет  $\geq 4$  (по трижды~~

~~дарили), тогда будет в этой  $x$  таблице существовать  $x-3, x+3$ , стоящая в сосед-~~

~~ней от него клетке, следовательно по условию задачи,~~

~~эти числа и будут друг и другом (8+3)-(8-3)=6)~~

предмет

Математика

класс

9

шифр

3-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

19. Назовём первыми словами вида  $a_1 a_2 \dots a_n$  (без пробела)  
 Ответ:  $2^{n+1}$ .

Пример: обозначим за  $a_1, a_2, \dots, a_n$  буквы  
 все алфавита. Пример дается на 3 буквы:  
 все буквы алфавита по возрастанию номера, 1 буква  
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_n, a_1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$   
 все буквы алфавита по убыванию номера,  
 все буквы алфавита по возрастанию номера,  
 все буквы алфавита по убыванию номера.

Предположим, что мы из этого примера смогли  
 получить некоторое слово  $a_1 a_2 \dots a_n$  (где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — буквы алфавита).

Тогда заметим, что тогда мы можем либо  
 I и поменять номер буквы  $a_i$  на  $a_{i+1}$  (или  $a_{i-1}$ )  
 (обозначим её за  $x$ ) и остаётся предложение  $n$ -к.

либо I поменять все буквы между  $a_i$  и  $a_{i+1}$   
 и либо оставить, либо I и наоборот, тогда

либо 1 буква в качестве кандидата остаётся — не  
 менять, либо поменять и наоборот — отнять 1 буква.

Если мы  $a_i$  не ~~поменяем~~ <sup>поменяем</sup> в  $a_{i+1}$  (или  $a_{i-1}$ )  
 то рассмотрим все  $n$  букв из  $a_1, \dots, a_n$  из которых

мы хотим получить слово, выйдет так:  $x y x$ ,



предмет Математика

класс 9

шифр

9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Заметим, что по индукции рассуждения I и II выполняются тогда  $\geq k-3$  букв не могут уместиться после <sup>эти</sup> предшествующей буквы, а по индукции рассуждения I и предшествующую выполняются  $k-3 \rightarrow \gamma$  эти  $\geq k-3$  букв не могут уместиться еще перед первой буквой, и они вдобавок все различны.

Иногда считаем количество букв в слове:

$\geq k-3$  букв между I и предшествующим выполняем  $\gamma$  <sup>или  $\gamma$</sup>   $(k-1)$ ,  $k$  букв  $\gamma$ ,

$n - (k-3) - 1 \leq n - k + 2$  букв, которые находятся до II выполняем и после предшествующей, уместятся  $\leq 2$  раза.

$$(k-3) \cdot 1 + 1 \cdot k + 2(n - k + 2) = 2k - 3 + 2n - 2k + 4 = 2n + 1$$

и никакой ошибки нет.

предшествующие буквы  $\Rightarrow$  слово состоит  $\leq 2n + 1$  букв <sup>содержит</sup>

№7.

Заметим, что 3 группы чисел  $1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2n$

и одной из них мы возьмем 2 числа,

станция в уловом клетке таблица  $9 \times 9$ .

Здесь опраки, облик, и при отнесении к каждой клетке  $9 \times 9$  заметим, что т.к. любая число отличается на 3 от  $3$  от  $3$  в соседней клетке или  $6$  от  $6$

\* в этой клетке будет стоять каши, шаш из этой группы.

предмет

класс

шифр

9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

эти числа распорядить по возрастанию и любые 2 соседних будут отличаться на 3  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  стоять в соседних клетках. Давайте будем рассматривать координаты клетки, в которую пойдёт число.

Строим ряды и столбцы,

тогда эти координаты будут изменяться на 1 при рассмотрении 2 соседних чисел.



Для попадания из 1,1 в клетку 9,9 (см. рис. выше)

нам путь совершить  $8 + n^*$  ходов вверх, на  $n$  ходов вправо,  $8 + k^*$  ходов вправо,  $8 + k$  ходов вниз (иначе мы переместимся

не на 8 строк <sup>вверх</sup> вправо и не на 8 столбцов вправо), всего  $8 + 2n + 2k$  — четное число перемещений. Для попадания из 1,1 в 9,1

иной правый угол путь совершить  $8 + n$  ходов вниз,  $n$  ходов вправо, по  $k$  ходов вверх и вниз (иначе переместимся

не на <sup>другую</sup> строку или не, в 9-й столбец),  $8 + 2k + 2n$  — четное.

\* в рассуждении мы считали из углов  $n$  и  $k$  — любое натуральное число

9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1

предмет

Математика

класс

9

шифр

9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Забавные то обозначения  $k \cdot n$ ,  
 чтобы попасть в верный ответ надо  
 совершить в  $k$  свёрток вверх,  $k$  свёрток вниз,  
 по  $n$  свёрток вправо и влево, в  $2k+2n$  чёт,  
 тогда чёт-неч-во раз свёртываем в  $n$  раз,  
 но возрастание  $\Rightarrow$  разность  $= 6$  (т.к. каждый  
 раз свёртываем на 2).

НО, пусть есть так ~~считается~~ <sup>(р-местное)</sup>  
~~записали все числа  $\leq p$ , пусть на~~  
~~какой-то момент  $k$  и  $k+2$ , тогда заметили,~~  
~~что предположим что все числа  $\leq p$  (р-местное)~~  
 тогда считали ~~все~~ <sup>какое</sup> числа  $\leq p$ , тогда  
 какое  $n$   $ok$  считали на  $p$  <sup>раз</sup> (степень  
 $p$  ~~у~~ <sup>как</sup> увеличится на 1), разность между соседними  
 числами прогрессии на  $p$  сократится (т.к.  
 сами числа увеличились на  $p$ ). Так делаем,  
 пока НОД всех чисел не станет  $= p$ .

Записали все числа  $\leq p$  (р-местное ~~столько~~),  
 если на какой-то  $n \geq 2$ , то заметили, что  
 т.к. не все числа  $\leq p$  пойдётся  $\leq p$  и  $p$

Почему  
 не все  $\leq p$   
 $p$  хотя  $\leq p$   
 2?

предмет Математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Соседние числа, между ними разность  $p$ . это не правда! может так получиться, но все же нет:  $p$  есть кратно  $p$  все так кроме одного.

~~$(\pm p)$  как произведение; (прим. произведение  $\pm p$ )~~

Тогда заметили, что ~~всегда~~ мы можем рассмотреть числа  $m$  между  $p$  разности на  $p$  считаем  $2$  ближайших числа,  $\pm p$ , между ними  $p-1$  чисел т.к. искомое обозначим за  $m$  разность между соседним в прогрессии.

$(\pm k) \pm r + m \cdot p \equiv p \Rightarrow$  между ними  $\leq p-1$  чисел, отражено

или  $\leq m$ , то  $m \cdot k + r \equiv p$ ,  $k \cdot r \equiv p \Rightarrow m \cdot k \equiv p$ , но  $m \nmid p$   $(k \in p \Rightarrow k \nmid p, p)$ . Рассчитаем  $2$  ближайших числа  $\equiv p^2$ , или мы считаем какие именно числа?

все числа на  $p$  то между ними  $m$  озвучили выше приехали  $p-1$  чисел  $\equiv p^2$ ,  $k \nmid p$  (разность между соседними  $\equiv p$  числами теперь не  $m \cdot p$ , а  $m$ , поэтому анализировать  $\begin{matrix} \text{добавить } p \\ \text{если } k \end{matrix}$  только рассуждения).

Тогда  $2$  рассмотрим отвлеченная между собой  $\equiv p$  чисел,  $\equiv p^2$  чисел и  $\nmid p$  чисел.

С одной стороны,  $\forall k \in p$  получаются  $(n-k) \in \frac{k(k-1)}{2}$ , а  $\nmid \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ , с другой,  $p$  присутствуют

предмет Математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

в количестве  $p-1$  в каждой из  $p$  групп  
шагу:  $p \Rightarrow$  из  $(n-k)k + \frac{k(k-1)}{2} (p-1)$  от  
 $(n-k) \left( k + \frac{k(k-1)}{2} + 1 \right) (p-1)$  из этого можно

вывести ограничения на  $k, p$  в зависимости

от  $n$ . Рассмотрим, т.е.  $\frac{k(k-1)}{2} \geq 1$  т.к.  $k \geq 2$ .

$$(n-k)k(p-1) \leq (n-k)^2$$

почему?

$$p \leq \frac{n-k}{k - \frac{1}{n-k}} \Rightarrow p \leq n-k \left( k \geq 2, \frac{1}{n-k} \leq 1 \right)$$

$$(p-1) \left( (n-k)k + \frac{k(k-1)}{2} \right) \leq (n-k)^2 \leq \left( (n-k)k + \frac{k(k-1)}{2} + 1 \right) (p-1)$$

$$(p-1) \frac{k(2n-k-1)-2}{2} \leq (n-k)^2 \leq \frac{k(2n-k-1)+2}{2} (p-1)$$

Ограничим  $p$ :

$$\frac{2(n-k)^2}{k(2n-k-1)+2} \leq p-1 \leq \frac{2(n-k)^2}{k(2n-k-1)-2}$$

Идея: рассмотреть каждое из  $p$  групп  
и в каждой группе будет выделено,  
но не может т.к. к целое  $p$  где  $n$  может быть  
противоречие.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

математика

класс

9

шифр

9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

~~Докажите, что в промежутке от  $\frac{n}{2}$  до  $\frac{n(n-1)}{2}$  включительно существует простое число  $p$  по модулю  $n$ .~~

Пусть  $n$  — простое число  $p$  лежащее в промежутке от  $\frac{n+1}{2}$  до  $\frac{n(n-1)}{2}$  включительно.

Если разность  $m$  между соседними числами в прогрессии  $\neq p$ , то между

2 соседними числами в прогрессии  $\neq p$  будет

$$p-1 \text{ чисел } \neq p. \text{ Тогда } m.н. \frac{n(n-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

попадёт  $\geq 1$  число  $\equiv p$ , и т.к. т.к.  $p$  если  $\neq p$

$$\text{чисел } \geq n-1, \text{ то } (n-1)(p-1) \geq \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{(n-1)(n-1)}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\text{чисел } \neq p, \text{ и } n-1+n \text{ чисел } \equiv p, \text{ тогда все } \geq \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n(n-1)}{2}$$

чисел  $\neq p$ ; всего из-за этого число чисел  $\neq p$

от 1 до  $n-1$  равно, но тогда  $n-1$  число  $\equiv p \Rightarrow$

$$\Rightarrow \geq n-1 \text{ числа } \equiv p, \neq p$$

Тогда разность цифр между соседними числами  $m$ ; если такая простая число  $p$ .

предмет Математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Покажем, что наибольшее число  $x$  равно количеству  
клеток. Заметим, что т.ч. разность:  $x$  или  
прямой от  $\frac{n+1}{2}$  до  $\frac{n(n-1)}{2}$  включительно (обозначим  
произведение на  $A$ ), то  $x$  или

$x \geq (n-1)A$ . Тогда заметим, что на строке  
 $n-1$  был сделан вывод, что  $p \leq n-k^* < n \Rightarrow$

$\Rightarrow x$  может быть: только прямой

из промежутка от 1 до  $n-1$  (обозначим

на произведение за  $B$ ).  $\Rightarrow x \leq B$  Для нахождения

противоположной нам формулы должны доказать, что

$$B < (n-1)A.$$

\* вывод был сделан при  $p, k \neq 1$  и  $k \neq n-1$ ,

сделаем это, подставив соответств. значения  $k$  в  
красное пер. в  $\#$  строке. Подставим:

$$2(n-1) \leq (n-1) \cdot \frac{(2n-2)}{2n-4} \leq n+1. \quad \# \Rightarrow \frac{(n-1)(1-\frac{2}{2n-4})}{2} \geq$$

$$p_1 \leq \frac{(2n-2)-2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(1-\frac{2}{2n-4})}{2}$$

при  $n$  на 1 больше  
возрастают на 1 и тем самым

Это пер. в формуле на  $n+1$ .

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

Математика

класс

9

шифр

9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

Подставим  $k = n-1$ .

$$p \leq \frac{2}{(n-1)(n-2)} \leq \frac{2}{19 \cdot 9900 - 2} = \frac{2}{9898} < 1,8$$

$$n-1 = \frac{2n-2}{2n-4} \leq n+1$$

$$\frac{2(n-1)^2}{2(n-2)(n+1)} \leq 1, \quad \frac{2(n-1)^2}{2(n-2)(n+1)} \leq 1$$

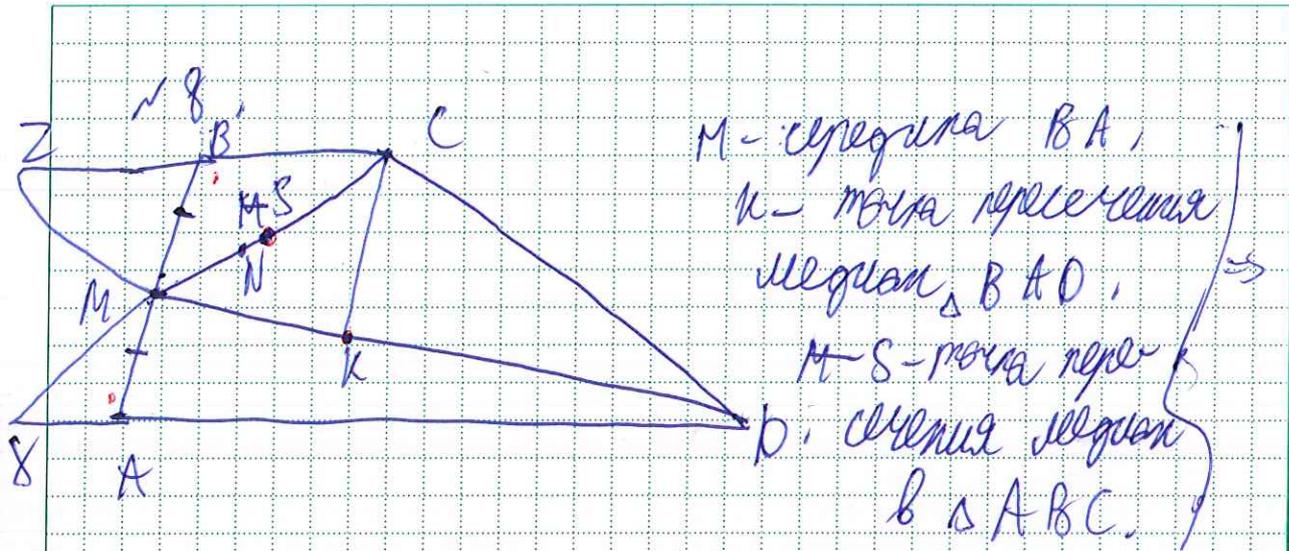
$$n^2 - 2n + 1 \leq n^2 - n - 2$$

$$2 \leq n, \text{ верно. Тогда } p \leq n+1.$$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет математика класс 9 шифр 9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.



М - середина BA,  
K - точка пересечения  
медиа  $\triangle BAO$ ,  
M-S - точка пересечения  
медиа в  $\triangle ABC$ .

$\Rightarrow \frac{CS}{SM} = \frac{2}{1} = \frac{DK}{KM}$  (следствие  
теоремы Фалеса для параллельных  
линий, так как делится  
в отношении 2:1)

Продлим DM до пересечения с CB в точке Z,  
CM до пересечения с AD в точке X.

Тогда  $\angle BMC = \angle XMA$  как вертикальные  
 $\angle ZMB = \angle AMD$

$\angle ZBM = \angle MAD$   
 $\angle XAM = \angle MBC$  } как смежные  
при секущей ABK  
 $ZC \parallel XD$  (транзитивность)

$\Rightarrow \triangle BMC \sim \triangle XMA$ ,  $\triangle ZMB \sim \triangle MAD$   
 $BM = MA$

$\Rightarrow \triangle BMC = \triangle AMX$ ,  $\triangle ZMB = \triangle MDA \Rightarrow ZC = XA + AD = XD$   
по св-ву биссектрисы в  $\triangle ZCD$  и  $\triangle DCX$   
биссектриса делит стороны  $ZD$  и  $CX$

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
КИРОВСКАЯ ОБЛАСТЬ

предмет

класс

шифр

9-02

Пишите аккуратно и разборчиво, не пишите вне рамки. Не забывайте указывать номер задания, которое Вы выполняете.

в отвлеченном триангуле ступен, т.е. если  
за  $N$  обозначить пересечение  $CX$  и биссектрисы

$$\angle ADC, \text{ т.е. } \frac{DK}{KZ} = \frac{CZ}{CB} = \frac{XD}{CB} = \frac{XN}{NC}$$

$$\frac{\frac{NC}{XN}}{\frac{XN}{NC}} = \frac{DK}{KZ} = \frac{DK}{KM+MZ} = \frac{\frac{2}{3}DM}{\frac{1}{3}DM+DM} = \frac{2}{4} = \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot CM}{\frac{1}{3}CM+DM}$$

$$= \frac{CS}{SM+MX} = \frac{CS}{SX}, \text{ тогда т.к. } N \in CX$$

( $C, X$  и на стороне  $CB \rightarrow$  есть биссектриса  
только  $[CX]$  пересекать)  $\Rightarrow N=S$ , доказать.