ЦДООШ
ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ
"ОДАРЕННЫЙ ШКОЛЬНИК"

L РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

КИРОВСКАЯ ОБЛАСТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

II (МУНИЦИПАЛЬНЫЙ) ЭТАП

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ, МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Киров
2023

Оргкомитету и жюри муниципального этапа
математической олимпиады школьников

Уважаемые коллеги!

В начале олимпиады напомните участникам, что нужно не только приводить ответы, но и *обосновывать* их (в этом, по существу, и состоит решение задачи, а ответ — лишь его результат).

Продолжительность олимпиады *составляет* **для 5-6 кл. — 2,5 часа, для 7 кл. — 3 часа, для 8 кл. — 3,5 часа, для 9-11 кл. — 3 часа 55 минут,** *не считая времени, потраченного на заполнение титульных листов работ и разъяснение условий задач.*

После олимпиады (лучше всего — *в тот же день*) просим провести *разбор задач для ее участников.*

Отзывы об этой брошюре и олимпиадных заданиях направляйте по адресу: *610005, г. Киров, 5, а/я 1026, ЦДООШ.*

Автор благодарен Г. А. Одинцовой, А. В. Черанёвой, О. В. Старостиной, В. В. Сидорову, О. В. Рубановой за полезные обсуждения и критику.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. *Решение каждой задачи, независимо от её трудности, оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи. Каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7, дробные оценки не допускаются.*

2. При оценке рассуждений в олимпиадных работах, как правило, сначала дается ответ на принципиальный вопрос: являются они решением задачи (хотя, может быть, и с различными недостатками) или не являются (хотя, может быть, и содержат существенное продвижение в направлении решения). В первом случае оценка должна быть *не ниже 4*, во втором – *не выше 3*.

3. По проверке и оценке решений большинства задач мы даём *конкретные указания*. Они помещаются после наших решений и отмечены значком •. В случаях, не предусмотренных конкретными указаниями, оценка определяется по следующим общим правилам:

Оценка	*За что ставится*
7	Верное решение
6	Верное решение с небольшими недочетами
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты
4	Решение в основных чертах верно и выполнено более чем наполовину, но существенно неполно
3	Решение в целом отсутствует, но рассуждения содержат существенное продвижение в верном направлении
1-2	Решение в целом отсутствует, но содержит более или менее заметное продвижение в верном направлении
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Решение, выполненное более чем наполовину, считается *существенно неполным*, если:

- ✓ содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- ✓ при верной общей схеме рассуждений явно или скрыто опирается на важные недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- ✓ состоит в разборе нескольких возможных случаев, и хотя бы один *существенный* случай упущен или разобран неверно;
- ✓ состоит из двух частей (например, доказательства необходимости и достаточности либо доказательства оценки и построения примера), из которых верно выполнена только одна, причём более сложная.

При расхождении между общими и конкретными указаниями применяются конкретные.

4. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота и обоснованность*. Нельзя снижать оценку за «нерациональность» решения (кроме отдельных редких случаев, когда это прямо предусмотрено конкретными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки и т.п.***

5. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего — логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, вычислительные ошибки в *не вычислительной* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочетам.

6. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике. Умение хорошо *догадываться* на олимпиаде должно цениться выше, чем умение хорошо изложить решение.

7. Ответ, найденный логическим путем, как правило, оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 5 КЛАССА

Задача 1. *У Игоря было 8 листов бумаги. Каждый из них он разрезал либо на 2 части, либо на 3 части. Всего у него получилось 23 части. Сколько листов он разрезал на 3 части? Как вы рассуждали?*

Ответ. 7 листов. ***Решение.*** Если бы он разрезал каждый лист на 2 части, получилось бы 16 частей. Каждый лист, разрезанный на 3 части, добавляет к этому количеству одну часть. Значит, на 3 части было разрезано 23 – 16 = 7 листов.

• За верный ответ (неважно, с проверкой или без) — *5 баллов*. Оставшиеся *2 балла* начисляются, если в решении описано, как был найден ответ, и из этого описания следует, что других ответов нет. В частности, за описание «нашел подбором» баллы не начисляются, а за полный перебор возможностей — начисляются.

♦ См. также задачу 1 для 6 класса.

Задача 2. *Петя записал два отличающихся на единицу трёхзначных числа и сообщил Ване, сколько каких цифр он написал (например: две двойки, одну тройку и т. д.). Всегда ли умный Ваня сможет точно установить, какие числа записал Петя? Ответ объясните.*

Ответ. Не всегда. ***Решение.*** Например, если Петя сообщил Ване, что он записал два нуля, одну восьмерку и три девятки, Ваня не сможет отличить запись 899 900 от записи 908 909.

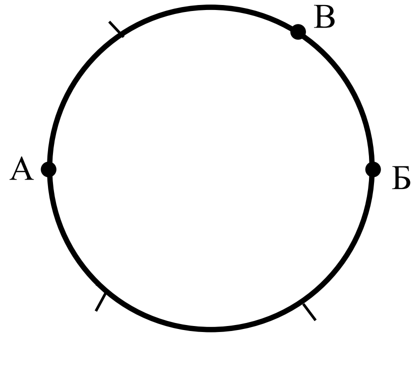
• За ответ «не всегда» без обоснования — *0 баллов*.

Задача 3. *В клетках таблицы 3 × 3 стоят нули. Разрешается выбрать в таблице любой квадрат 2 × 2 и увеличить каждое из стоящих в нем чисел на 1. Можно ли несколькими такими операциями получить таблицу на рисунке справа?*

4	*10*	*6*
14	*28*	*13*
10	*13*	*7*

Ответ. Нельзя. ***Первое решение.*** Поскольку центральная клетка таблицы входит в каждый квадрат 2 × 2, каждая операция увеличивает число в центральной клетке на 1. С другой стороны, каждая угловая клетка входит только в один квадрат 2 × 2, причем разные угловые клетки — в разные квадраты. Поэтому число в центральной клетке должно равняться сумме чисел в угловых клетках. Но 4+6+10+7 не равно 28. Поэтому такую таблицу получить нельзя. ***Второе решение.*** Средняя клетка нижней строки попадает в два квадрата 2 × 2: левый нижний и правый нижний. При этом левая клетка нижней строки попадает только в левый нижний квадрат, а правая — в правый нижний. Поэтому число в средней клетке нижней строки должно равняться сумме чисел в левой и правой клетках этой строки. Но 10+7 не равно 13. ***Третье решение***. Поскольку каждый квадрат 2 × 2 содержит центральную клетку таблицы, каждая операция увеличивает на 1 число в центральной клетке. Следовательно, необходимо проделать 28 операций, то есть сумму всех чисел увеличить с 0 до 4 × 27=108. Но сумма чисел в приведенной таблице меньше 108.

• За ответ «нельзя» без объяснения — *0 баллов*.



Задача 4. *На кольцевой дороге есть три бензоколонки: А, Б и В. Если ехать по часовой стрелке, расстояние от А до Б будет таким же, как от Б до А, а расстояние от А до В — вдвое меньше, чем от В до А. В каком*

направлении (по часовой стрелке или против часовой стрелки) и во сколько раз расстояние по дороге от Б до В короче, чем от В до Б? Объясните, как вы получили ответ, нарисуйте чертеж.

Ответ. Против часовой стрелки в пять раз короче. ***Решение.*** Поделим дорогу на шесть равных частей, начиная с бензоколонки А. Тогда между А и Б в обеих направлениях будет по три части, а между А и В по часовой стрелке — две части, а против часовой — четыре (см. рисунок). Поэтому между Б и В против часовой стрелки — одна часть, а по часовой — пять частей, откуда и вытекает ответ.

• За ответ без чертежа и объяснения — *0 баллов*. Нарисован верный чертеж, дан верный ответ, разумного продвижения в пояснениях нет — *4 балла*.

Задача 5. *Есть два автомата. Один — Прибавитель — за рубль к введенному в него числу прибавляет некоторое (всегда одно и то же) положительное число и выдает результат. Другой — Умножитель — за рубль любое введенное в него число умножает на некоторое (всегда одно и то же, не обязательно такое же, как у Прибавителя) положительное число и выдает результат. При этом какой автомат Прибавитель, а какой — Умножитель, заранее неизвестно. За какую наименьшую сумму можно выяснить, какой автомат — Прибавитель, а какой — Умножитель?*

Ответ. За 1 рубль. ***Решение***. Выберем любой из двух автоматов и введем в него число 0. Умножитель в ответ выдаст 0, а Прибавитель — то положительное число, которое он прибавляет.

• За ответ без объяснения — *0 баллов*. Придумана идея с введением нуля, но он вводится в оба автомата — *3 балла*.

♦ См. также задачу 4 для 7 класса.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 6 КЛАССА

Задача 1. *У Игоря было 200 листов бумаги. Каждый из них он разрезал либо на 10, либо на 11 частей. Всего у него получилось 2023 части. Сколько листов он разрезал на 11 частей? Ответ объясните.*

Ответ. 23 листа. ***Решение.*** Если бы он разрезал каждый лист на 10 частей, получилось бы 2000 частей. Каждый лист, разрезанный на 11 частей, добавляет к этому количеству одну часть. Значит, на 11 частей было разрезано 2023–2000 = 23 листа.

• За верный ответ (неважно, с проверкой или без) — *5 баллов*. Оставшиеся *2 балла* начисляются, если в решении описано, как был найден ответ, и из этого описания следует, что других ответов нет. В частности, за описание «нашел подбором» баллы не начисляются.

♦ См. также задачу 1 для 5 класса.

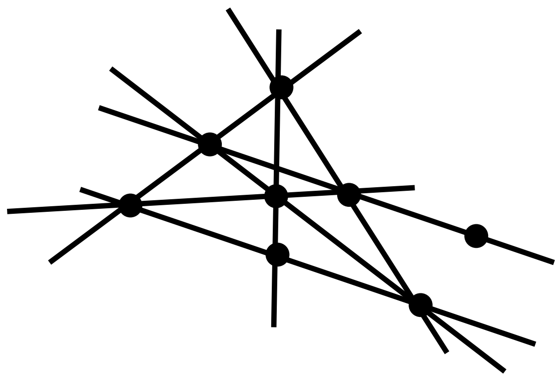
Задача 2. *Найдите такое трехзначное натуральное число* n*, что для записи всех трех трехзначных чисел* n*,* $n+1$ *и* $n+2$ *достаточно трех различных цифр.*

Ответ. Например, 111 или 988. Есть и другие примеры.

♦ См. также задачу 1 для 8 класса.

• За ответ «можно» без объяснения — *0 баллов*. За любой верный пример — *7 баллов*.

Задача 3. Можно ли выбрать 8 точек так, чтобы они лежали на 7 прямых линиях, по 3 точки на каждой? Если можно — нарисуйте, как. Если нельзя — объясните, почему.



Ответ. Можно. ***Решение.*** Например, так, как на рисунке справа.

• За ответ «можно» без объяснения — *0 баллов*. За любой верный рисунок — *7 баллов*.

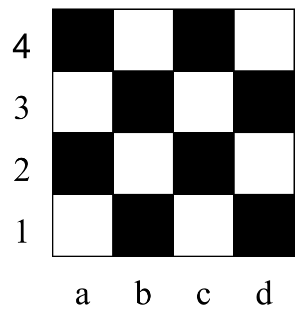
Задача 4. *Незнайка записал натуральное число, затем стер у него последнюю цифру и сложил полученное число с исходным. У него получилось 2023. Докажите, что он где-то ошибся.*

Решение. Пусть Незнайка записал число с последней цифрой a. Если после стирания цифры a у него получилось число B, то исходное число равнялось $10B+a$. Незнайка утверждает, что $10B+a+B = 11B+a = 2023$, откуда $11B = 2023-a$. Но число a не больше 9, а среди чисел от $2023-9 = 2014$ до 2023 таких, которые делятся на 11, нет: на 11 делится число 2013, а следующее делящееся на 11 число равно 2024.

• Используется ребус $\overline{abcd}+\overline{abc}=2023$ и отсутствует обоснование того, что исходное число четырехзначное — *не выше 6 баллов*.

Задача 5. *Клетки доски 4 × 4 покрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Петя и Вася (начинает Петя) по очереди ставят на пустые клетки доски фишки: Петя — на белые, Вася — на черные. При этом нельзя ставить фишку на клетку рядом с фишкой соперника. Проигрывает тот, кто не может поставить очередную фишку без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. ***Решение.*** Пронумеруем подряд, начиная с белого углового поля, горизонтали доски цифрами 1, 2, 3, 4, а вертикали — буквами a, b, c, d так, чтобы поле a1 было белым (см. рисунок). Первым ходом Петя ставит фишку на поле b2 и закрывает Васе ходы на поля a2, b1, b3 и c2. После этого Вася может ставить фишки только на поля a4, c4, d3 и d1. Пусть Вася первым ходом ставит фишку на a4 или c4. Тогда Петя вторым ходом ставит фишку на d2 и закрывает Васе ходы на поля d3 и d1. После этого Вася сможет сделать только один ход на оставшуюся пустой черную клетку в четвертой горизонтали, а у Пети остались еще два гарантированных хода в клетки a1 и c1. Значит, Петя победит своим третьим ходом. Случай, когда Вася первым ходом ставит фишку на d1 или d3, разбирается аналогично.



♦ См. также задачу 5 для 8 класса.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА

Задача 1. *Игорь придумал шифр, в котором каждая буква шифруется двузначным или трехзначным числом. Оказалось, что слово ОКО шифруется числом 1111111, а слово ЛОВ — числом 11211121. Каким числом может шифроваться слово ВОЛК? Перечислите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.*

Ответ. 12111112111. ***Решение.*** Так как слово ОКО шифруется числом 1111111, буква О шифруется либо числом 111, либо числом 11. Но шифр 111 невозможен, так как тогда получается, что буква К шифруется однозначным числом 1. Значит, О шифруется как 11, а К — как 111. Следовательно, в шифре слова ЛОВ шифр буквы О — это две из трех средних единиц. Очевидно, это две первые из них — иначе шифр у буквы Л будет четырехзначным. Значит, буква Л шифруется числом 112, а буква В — числом 121. Теперь, зная шифры всех букв слова ВОЛК, мы получаем ответ.

• За ответ без всякого объяснения — *0 баллов*. За верное указание шифра каждой из букв О, К, Л, В — *по 1 баллу, из оставшихся 3 баллов* оценивается объяснение, почему шифры именно такие.

Задача 2. *Найдите какое-нибудь девятизначное число, делящееся на 13, все цифры которого различны.*

Ответ. Например, 396578104.

♦ Чтобы найти искомое число, выпишем несколько первых чисел, делящихся на 13: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, выберем из них несколько таким образом, чтобы в их записи встречались по разу 9 различных цифр и запишем их подряд. Это можно сделать многими разными способами, один из которых представлен в ответе.

• За любой верный пример — *7 баллов*, проверка и объяснение не обязательны. За идею записывать подряд числа, делящиеся на 13, при отсутствии верного примера — *2 балла*.

Задача 3. Такова же, как задача 4 для 5 класса.

• За ответ без чертежа и объяснения — *0 баллов*. Нарисован верный чертеж, дан верный ответ, разумного продвижения в пояснениях нет — *4 балла*.

Задача 4. *Есть два автомата. Один — Прибавитель — за рубль к введенному в него числу прибавляет некоторое число (всегда одно и то же) и выдает результат. Другой — Умножитель — за рубль любое введенное в него число умножает на некоторое число, не равное 1 (всегда одно и то же, не обязательно такое же, как у Прибавителя) и выдает результат. При этом какой автомат Прибавитель, а какой — Умножитель, заранее неизвестно. За какую наименьшую сумму можно с гарантией выяснить, какой автомат — Прибавитель, а какой — Умножитель?*

Ответ. За 2 рубля. ***Решение.*** Выберем один из автоматов и введем в него нуль. Если в ответ получим не нуль, то этот автомат — Прибавитель. Если в ответ получим нуль, то автомат может быть Прибавителем нуля или Умножителем. Тогда введем в него единицу. Прибавитель нуля выдаст в ответ единицу, а умножитель — число, отличное от единицы, так как множитель 1 запрещен условием задачи. Таким образом, мы можем распознать автоматы за два рубля.

Покажем, что одного рубля может не хватить. Пусть мы на свой единственный рубль хотим ввести в автомат число a. Тогда если автоматы окажутся Умножителем на нуль и Прибавителем числа $-a$, которые дают с числом a одинаковый результат 0, мы ничего не узнаем.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*, пример на 2 рубля оценивается *из 3 баллов*, доказательство, что одного рубля не хватит — *из 4 баллов*, баллы за две части решения складываются.

♦ См. также задачу 5 для 5 класса.

Задача 5. *Шнур длиной 3 м состоит из нескольких зеленых и нескольких красных участков. Зеленый участок горит со скоростью 3 см/сек, а красный — со скоростью 2 см/сек. Когда шнур подожгли одновременно с двух концов, он сгорел за 59 секунд. Какова суммарная длина красных участков шнура?*

Ответ. 108 см. ***Решение.*** Очевидно, если шнур поджечь с одного конца, он будет гореть вдвое дольше, чем подожженный с двух концов, то есть 118 секунд. Пусть общая длина красных участков — x см. Тогда общая длина зеленых — $300–x$ см, и веревка, подожженная с одного конца, будет гореть $x/2+(300–x)/3$ сек. Решая уравнение $x/2+(300–x)/3 = 118$, находим $x = 108$.

• За ответ без объяснения — *0 баллов*. Замечено, что шнур, подожженный с одного конца, горит 118 секунд, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*. Уравнение верно составлено, но неверно решено — *4 балла*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. *Есть два автомата. Один — Прибавитель — за рубль к введенному в него числу прибавляет некоторое положительное число (всегда одно и то же) и выдает результат. Другой — Умножитель — за рубль любое введенное в него число умножает на некоторое (всегда одно и то же, не обязательно такое же, как у Прибавителя) положительное число и выдает результат. При этом какой автомат Прибавитель, а какой — Умножитель, заранее неизвестно. Как за 1 рубль выяснить, какой автомат — Прибавитель, а какой — Умножитель?*

Решение. См. решение задачи 5 для 5 класса.

Задача 2. *Барон Мюнхгаузен проехал на коне 50 км. Он рассказывал потом, что потратил на весь путь 3 часа, причем его средняя скорость в первые два часа равнялась 20 км/ч и в последние два часа — тоже 20 км/ч. Могло ли случиться, что он сказал правду?*

Ответ. Могло. ***Решение.*** Так могло быть в случае, когда Мюнхгаузен первый и третий часы пути скакал со скоростью 10 км/ч, а второй час со скоростью 30 км/ч.

• Ответ «могло» без обоснования — *0 баллов*.

Задача 3. *Может ли биссектриса остроугольного треугольника быть вдвое длиннее его высоты, проведенной из той же вершины?*

Ответ. Не может. ***Решение.*** Проведем в остроугольном треугольнике ABC высоту AH и биссектрису AL. Если в прямоугольном треугольнике AHL гипотенуза AL вдвое длиннее катета AH, то его угол HAL равен 60 градусам. Но этот угол составляет часть угла, образованного биссектрисой угла BAC с одной из его сторон, который равен половине угла BAC остроугольного треугольника и потому меньше 45 градусов. Противоречие.

Задача 4. *Три числа таковы, что их сумма равна 0, а куб разности любых двух из них равен разности их кубов (взятых в том же порядке). Докажите, что среди этих чисел есть нуль.*

Решение. Обозначим наши числа через x, y и z. Пусть среди них нет нуля. По условию $0 = (x^3–y^3)–(x–y)^3 = (x–y)(x^2+xy+y^2–(x–y)^2) = 3xy(x–y)$. Так как x и y — не нули, то $x–y = 0$, то есть $x = y$. Аналогично доказывается, что $y = z$. Но если сумма трех одинаковых чисел равна 0, то каждое из этих чисел равно 0.

• Деление на выражение, которое может обращаться в 0, без отдельного рассмотрения случая, когда оно равно 0 — *не выше 2 баллов*.

♦ См. также задачу 4 для 9 класса.

Задача 5. *Клетки доски 5×5 покрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке так, что угловые клетки — белые. Петя и Вася (начинает Петя) по очереди ставят на пустые клетки доски фишки: Петя — на белые, Вася — на черные. При этом нельзя ставить фишку на клетку рядом с фишкой соперника. Проигрывает тот, кто не может поставить очередную фишку без нарушения правил. Кто выиграет при правильной игре?*

Ответ. Петя. ***Решение.*** Первым ходом Петя ставит фишку в центральную клетку доски. После этого Вася может ходить только на черные клетки, находящиеся в четырех квадратах 2×2, расположенных в углах доски. Вторым и третьим ходом Петя должен поставить по фишке в любые два из этих квадратов (что, очевидно, возможно). Вася при такой игре Пети сможет сделать только четыре хода в два оставшихся квадрата, а Петя может сделать еще по одному ходу в каждый из занятых им квадратов, и выиграть на пятом ходу.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА

Задача 1. *Найдите такое четырехзначное натуральное число* n, *что для записи всех трех четырехзначных чисел* n, $n+1$ *и* $n+2$ *достаточно трех различных цифр.*

Ответ. Например, 1111, 1112, 1113 или 9988, 9989, 9990. Есть и другие примеры.

• За любой верный пример — *7 баллов*.

Задача 2. *На своем дне рождения профессор сказал: «Если вы сложите год моего рождения с нынешним, затем вычтете год моего 10-го дня рождения и год моего 50-го дня рождения, а затем добавите мой возраст, то получите 80.» Сколько лет профессору?*

Ответ. 70 лет. ***Решение.*** Пусть профессор родился в y-ом году и ему x лет. Тогда номер нынешнего года — $y+x$, а номера лет 10-го и 50-го дней рождения — $y+10$ и $y+50$ соответственно. По условию $y+(y+x)–(y+10)–(y+50)+x = 80 \Leftrightarrow 2x–60 = 80 \Leftrightarrow x = 70$.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*.

Задача 3. *Мотоциклист был в пути три часа. Его средняя скорость в первые два часа равнялась 50 км/ч и в последние два часа — тоже 50 км/ч. Какое наибольшее расстояние он мог преодолеть?*

Ответ. 200 км. ***Решение.*** Если мотоциклист первый и третий часы пути ехал со скоростью 100 км/ч, а второй час стоял, то он преодолел 200 км, а его средняя скорость как в первые так и в последние два часа пути равнялась 100/2 = 50 км/ч. Больше 200 км он проехать не мог, так как за первые два часа проехал 100 км, и за последний час — не более 100 км, так как 100 км он проехал за последние два часа.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*. Ответ с примером без оценки и ответ с оценкой без примера оцениваются *из 3 баллов*.

Задача 4. *Три числа таковы, что куб суммы любых двух из них равен сумме их кубов. Докажите, что среди этих чисел есть нуль.*

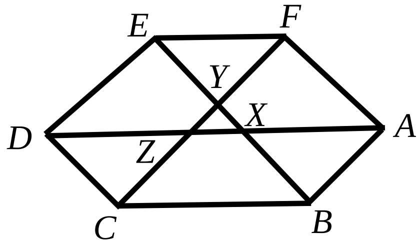
Решение. Обозначим наши числа через x, y и z. Пусть среди них нет нуля. По условию. $0 = (x^3+y^3)–(x+y)^3 = (x+y)(x^2–xy+y^2–(x+y)^2) = –3xy(x+y)$. Так как x и y — не нули, то $x+y = 0$, то есть $x = –y$. Аналогично доказывается, что $y = –z$ и $z = –x$. Но тогда $x = –y = –(–z) = z$ и $–z = z$, откуда $z = 0$.

• Деление на выражение, которое может обращаться в 0, без отдельного рассмотрения случая, когда оно равно 0 — *не выше 2 баллов*.

Задача 5. Такова же, как задача 5 для 8 класса

Задача 6. *Шестиугольник ABCDEF, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что площадь шестиугольника не меньше 6.*

Решение. Так как площади треугольников ABC и BCD по условию равны, то равны и высоты, опущенные на их общее основание BC. Поскольку все углы шестиугольника меньше 180 градусов, вершины B и C лежат с одной стороны от прямой AD. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Аналогично, $EF \parallel AD$, $CD \parallel BE \parallel AF$, $AB \parallel CF \parallel DE$.



Пусть диагонали AD и BE пересекаются в точке X, диагонали BE и CF — в точке Y, диагонали CF и AD — в точке Z. С точностью до выбора обозначений можно считать, что точка X принадлежит трапеции $ABCF$ (см. рисунок). Тогда наш шестиугольник можно разбить на параллелограммы $ABCZ$, $AFEX$, $EDCY$ и треугольник XYZ (который может выродиться в точку). Площадь каждого из трех перечисленных параллелограммов равна 2, так как половину каждого из них составляет один из треугольников, площадь которого по условию равна 1 (например, для параллелограмма $ABCZ$ это треугольник ABC). Площадь шестиугольника не меньше суммы площадей этих параллелограммов, откуда и вытекает утверждение задачи.

• Доказана только параллельность противоположных сторон шестиугольника — *2 балла*. Тот факт, что точки B и C лежат с одной стороны от прямой AD и аналогичные факты используются без объяснения — *не снижать оценку*.

♦ См. также задачу 5 для 10 класса.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА

Задача 1. *Найдется ли такое четырехзначное натуральное число n, что для записи всех трех четырехзначных чисел n, n+1 и n+2 достаточно трех различных цифр?*

Ответ. Найдется. ***Решение.*** Например, 1111 или 9988. Есть и другие примеры.

• За любой верный пример — *7 баллов*.

Задача 2. *В 10 клетках сидят 25 животных — зайцев и кроликов. Известно, что если в клетке есть заяц, то там не больше одного кролика, а если в клетке есть* *кролик, то там не больше одного зайца. Докажите, что есть клетка, в которой все животные — одной породы.*

Решение. Допустим, клетки, где все животные одной породы, нет. Тогда в каждой клетке есть и зайцы и кролики. Но в такой клетке по условию не больше одного зайца и не больше одного кролика, то есть в ней ровно два животных. Однако, в таком случае всего у нас 20 животных, а не 25. Противоречие.

Задача 3. *Найдутся ли такие пять различных натуральных чисел a, b, c, d, e, что среди дробей a/b, a/c, a/d, a/e, b/c, b/d, b/e, c/d, c/e, d/e девять сократимы, а одна несократима?*

Ответ. Найдутся. ***Решение.*** Например, 2, 6, 10, 14, 105. Несократима дробь 2/105, остальные сократимы.

• Любой верный пример — *7 баллов*. Проверка не обязательна.

♦ Такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$, что среди дробей a_i/a_j $(i > j)$ есть ровно одна несократимая, найдутся для любого натурального $n \geq 3$. Достаточно взять $n-1$ различных простых чисел $p_1, \ldots, p_{n-1}$ и положить $a_1 = p_1$, $a_2 = p_1p_2$, …, $a_{n-1} = p_1p_{n-1}$, $a_n = p_2\ldots p_{n-1}$. Единственной несократимой будет дробь a_1/a_n. Мы построили наш пример, взяв $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$.

Задача 4. *Докажите, что удвоенная сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата его третьей стороны.*

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. По неравенству треугольника $a+b > c$, откуда $a^2+b^2+2ab > c^2$. Кроме того, $a^2+b^2 \geq 2ab$. Значит, $2a^2+2b^2 > c^2$. ***Замечание.*** Неравенство $a^2+b^2+2ab > c^2$ следует также из теоремы косинусов.

Задача 5. *Шестиугольник ABCDEF, все углы которого меньше 180 градусов, таков, что каждый треугольник, образованный тремя идущими подряд его вершинами, имеет площадь 1. Докажите, что если AB < DE, то BC > EF.*

Решение. Так как площади треугольников ABC и BCD по условию равны, то равны и высоты, опущенные на их общее основание BC. Поскольку все углы шестиугольника меньше 180 градусов, вершины B и C лежат с одной стороны от прямой AD. Поэтому прямые BC и AD параллельны. Аналогично, $EF \parallel AD$, откуда $BC \parallel EF$, и $AB \parallel CF \parallel DE$. По условию треугольники ABC и DEF имеют равные площади, то есть $AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = DE \cdot EF \cdot \sin\angle DEF$. Так как $AB \parallel DE$ и $BC \parallel EF$, $\sin\angle ABC = \sin\angle DEF$. Значит, $AB \cdot BC = DE \cdot EF$, и поскольку $AB < DE$, то $BC > EF$, что и требовалось доказать.

• Доказана только параллельность противоположных сторон шестиугольника — *2 балла*. Тот факт, что точки B и C лежат с одной стороны от прямой AD и аналогичные факты используются без объяснения —*не снижать оценку*.

Задача 6. *Что больше: число способов разложить все 19 гирек с весами 1 г, 2 г, …, 19 г на две чашки весов так, чтобы весы остались в равновесии, или число способов разложить так все 20 гирек с весами 1 г, 2 г, …, 20 г?*

Ответ. Число способов разложить 20 гирек. ***Решение.*** Пусть 19 гирек с весами 1 г, 2 г, …, 19 г разложены на две чашки весов так, что весы в равновесии. Переложим гирьку весом 10 г на другую чашку весов, а на ее место положим гирьку весом 20 г.

Обе чашки потяжелели на 10 г, и равновесие сохранилось. Таким образом, каждому равновесному раскладу гирек весом от 1 до 19 г соответствует по описанному правилу некоторый равновесный расклад гирек весом от 1 до 20 г, причем разным раскладам, очевидно, соответствуют разные. Поэтому равновесных раскладов гирек весом от 1 до 19 г не больше, чем равновесных раскладов гирек весом от 1 до 20 г. То, что равновесных раскладов гирек весом от 1 до 20 г строго больше, следует из того, что среди них есть расклады, в которых гирьки весом 10 г и 20 г находятся на одной чаше весов, например, когда гирьки весом 10, 20, 13, 14, 15, 16, 17 г на одной чашке и остальные гири — на другой.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. Дана последовательность $\left\{x_n = \dfrac{n^2+n}{2}\right\}$ (n = 1, 2, …). Докажите, что для любых двух членов x_k и x_m этой последовательности число x_k+x_m+km тоже является ее членом.

Решение. $x_k+x_m+km = (k^2+k)/2+(m^2+m)/2+km = ((k+m)^2+k+m)/2 = x_{k+m}$.

Задача 2. *Может ли сумма квадратов синусов углов треугольника равняться 2?*

Ответ. Может. ***Решение.*** У прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A+\cos^2 A+1 = 2$.

Задача 3. Такова же, как задача 5 для 7 класса.

• За ответ без объяснения — *0 баллов*. Замечено, что шнур, подожженный с одного конца, горит 118 секунд, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*. Уравнение верно составлено, но неверно решено — *4 балла*.

Задача 4. *Найдутся ли такие пять различных натуральных чисел a, b, c, d, e, что среди дробей a/b, a/c, a/d, a/e, b/c, b/d, b/e, c/d, c/e, d/e семь сократимы, а три несократимы?*

Ответ. Найдутся. ***Решение.*** Например, 2, 3, 4, 8, 48. Сократимы все дроби с четными числителем и знаменателем и дробь 3/48, остальные сократимы.

• Любой верный пример — *7 баллов*. Проверка не обязательна.

♦ См. также задачу 4 для 10 класса.

Задача 5. Такова же, как задача 5 для 10 класса.

• Доказана только параллельность противоположных сторон шестиугольника — *2 балла*. Тот факт, что точки B и C лежат с одной стороны от прямой AD и аналогичные факты используются без объяснения —*не снижать оценку*.

Задача 6. *В классе каждый ученик дружит ровно с шестью другими, и у любых двух учеников есть ровно два общих друга.* ***а)*** *Сколько учеников в этом классе?* ***б)*** *Докажите, что такая ситуация действительно возможна. (Считается, что если А дружит с Б, то и Б дружит с А.)*

Решение[1]**. а)** Пусть A — ученик класса, B_1, …, B_6 — его друзья, а X — некоторый ученик класса, отличный от A. По условию у X должно быть ровно два друга среди B_1, …, B_6. С другой стороны, у любых двух друзей B_i и B_j ученика A есть единственный общий друг X, отличный от A. Поэтому учеников, отличных от A, в классе столько же, сколько различных пар, составленных их друзей ученика A, то есть $6 \cdot 5/2 = 15$, а всего в классе *16 учеников*. **б)** Построим 16 учеников в виде квадрата 4x4, и пусть каждый ученик дружит со всеми, кто стоит с ним в одном ряду (одной шеренге или одной колонне). Нетрудно убедиться, что такое отношение дружбы удовлетворяет условиям задачи.

- Пункт а) оценивается *из 4 баллов*, пункт б) — *из 3 баллов*.

ИСТОЧНИКИ И АВТОРЫ ЗАДАЧ

XXX Пермская городская олимпиада по математике, 2003 г. (с изменением числовых данных): 6-4.

XXVII Пермская городская олимпиада по математике, 2000 г.: 7-5.

Олимпиада Индии, 2013, вариация К. Кнопа: 10-6.

Олимпиада Башкортостана, 1999 г., 2 этап: 11-6.

Олимпиада Башкортостана, 2000 г., 2 этап: 11-1

Фольклор: 5-1, 5-4 = 7-3, 6-3, 8-2, 8-3, 9-3, 10-4.

Остальные задачи составлены И. С. Рубановым специально для этой олимпиады.

[1] Цитируется с сокращениями и изменениями по книге «Всероссийские математические олимпиады школьников в Республике Башкортостан. II этап. Задачи и решения. –Уфа, Уральский РЭК, 2004 – с. 35.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Информация о победителях и призерах областной олимпиады 2022/23 г.

ДИПЛОМ I СТЕПЕНИ: *Данила Малафеев* (КЭПЛ, 7 кл.), *Ульяна Кучина* (КЭПЛ, 8 кл.), *Сергей Суровцев* (КФМЛ, 9 кл.), *Михаил Муравьев* (КФМЛ, 10 кл.), *Александр Гнусов* (КФМЛ, 11 кл.).

ДИПЛОМ II СТЕПЕНИ: *Егор Кочуров, Федор Кротов, София Мокрушина, Алексей Сунцов,* (все — КФМЛ, 7 кл.), *Лев Гремицкий, Михаил Ершов, Андрей Ходырев* (все — КФМЛ, 8 кл.), *Иван Киселев, Игорь Чебыкин* (оба — КФМЛ, 9 кл.), *Илья Таланкин* (КФМЛ, 10 кл.), *Никита Паюсов* (Лицей № 21, 11 кл.), *Иван Гребенкин, Кирилл Тихонов* (оба — КФМЛ, 11 кл.).

ДИПЛОМ III СТЕПЕНИ: *Мария Казанцева* (Киров, школа 47, 7 кл.), *Мария Котельникова* (ВГГ, 7 кл.), *Евгения Краскова* (КЭПЛ, 7 кл.), *Анна Мошура, Софья Широкова* (обе — КФМЛ, 7 кл.), *Нелли Рождественская* (КФМЛ, 7 кл. — за 8 кл.), *Марат Исмагилов* (КЭПЛ, 8 кл.), *Александр Волков, Максим Ворончихин, Софья Новикова, Максим Осацкий* (все — КФМЛ, 8 кл.), *Александр Бяков, Софья Новоселова, Всеволод Поскребышев, Александр Саетов* (все — КФМЛ, 9 кл.), *Полина Усольцева* (Лицей № 21, 10 кл.), *Алина Грель, Иван Девятьяров, Андрей Маточкин, Кира Соловьева, Михаил Шихалеев* (все — КФМЛ, 10 кл.), *Григорий Кононов, Вадим Пупышев, Павел Усатов* (все — КФМЛ, 11 кл.).

ПОХВАЛЬНАЯ ГРАМОТА: *Даниил Копычев* (школа г. Омутнинска, 7 кл.), *Анатолий Мордвин* (школа им. В.И. Десяткова г. Белая Холуница, 7 кл.), *Ульяна Семенищева* (КЭПЛ, 7 кл.), *Федор Калинин, Андрей Огарков* (оба — КФМЛ, 7 кл.), *Николай Гнусов, Глеб Костицын, Анна Рашева, Арина Целищева* (все — КФМЛ, 9 кл.), *Егор Нелюбин* (КФМЛ, 10 кл.), *Полина Сизова* (Лицей № 21, 10 кл.).

ПОХВАЛЬНЫЙ ОТЗЫВ I СТЕПЕНИ: *Павел Зверев* (Лицей имени Г.С. Шпагина г. Вятские Поляны, 11 кл.), *Анастасия Сиротина, Владимир Урванцев* (оба — КФМЛ, 11 кл.).

ПОХВАЛЬНЫЙ ОТЗЫВ II СТЕПЕНИ: *Андрей Зянкин* (Лицей г. Кирово-Чепецка, 11 кл.), *Мария Смирнова, Дмитрий Суевалов* (оба — КФМЛ, 11 кл.).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2: ХРОНИКА (ноябрь 2022 – октябрь 2023)

6 – 12 ноября. В г. Владимире прошёл LIX Уральский турнир юных математиков. Участвовало 116 команд, представлявшие 23 города России. Команда «Киров-8» заняла 4 место во второй А лиге старшей группы, команда «Киров-7» заняла 3 место во второй лиге младшей группы, команда «Киров-6» — 7 место во второй А лиге группы «Старт».

18 – 20 ноября состоялся Казанский турнир математических игр имени А.П. Нордена, в котором приняло участие 12 кировских команд. Команды «Киров 5-1», «Киров 5-2», «Киров 5-3», «Киров 5-6», «Киров 5-7», «Киров 6-1» завоевали дипломы II степени, команды «Киров 5-4», «Киров 6-2», «Киров 6-4» — дипломы III степени.

22 – 29 ноября. В г. Твери состоялся XXV Кубок памяти А.Н. Колмогорова. Участвовало 60 команд, представлявших 20 городов России. Команда «Киров-11» поделила 7-8 место в первой лиге старшей группы, команда «Киров-9» заняла 3 место в первой лиге младшей группы.

18 декабря (для 7-11 кл.) и 19 марта (для 4-6 кл.) состоялся второй (очный) тур олимпиады Юношеской математической школы (ЮМШ). Кировчане участвовали на региональной площадке в ЦДООШ, 34 из них награждены дипломами и похвальными отзывами.

3 – 5 февраля состоялся Казанский турнир математических игр имени П.А. Широкова. В нем участвовало 13 команд кировчан, из которых команды «Киров 5-3», «Киров 6-5» завоевали дипломы I степени, команды «Киров 5-1», «Киров 5-2», «Киров 5-4», «Киров 6-6» — дипломы II степени, команды «Киров 5-6», «Киров 5-7», «Киров 6-3» — дипломы III степени.

19 февраля (для 6-8 кл.) и 5 марта (для 9-11 кл.) Санкт-Петербургская городская математическая олимпиада. 19 февраля эта олимпиада для кировчан проводилась под руководством члена её жюри Сергея Берлова непосредственно в Кирове, ученики 9-11 классов 5 марта соревновались в Санкт-Петербурге. 19 кировчан награждены дипломами и похвальными отзывами: *Александр Гнусов* — дипломом I степени, *Сергей Суровцев* — дипломом II степени, *Иван Птушкин* (КФМЛ, 6 кл.), *Александр Волков, Михаил Муравьев, Игорь Чебыкин* — дипломами III степени, *Лев Гремицкий, Михаил Ершов, Марат Исмагилов, Андрей Ходырев, Александр Саетов, Вадим Пупышев, Кирилл Тихонов* — похвальными отзывами I степени, *Ярослав Долженков* (КФМЛ, 8 кл.), *Софья Новикова, Максим Осацкий, Дмитрий Целищев* (КЭПЛ, 8 кл.), *Иван Гребенкин, Григорий Кононов* — похвальными отзывами II степени.

Январь, март. 34592 учащихся из Кировской области участвуют в математических конкурсах «Смарт-Кенгуру» и «Кенгуру».

3 – 6 марта. В г. Казани прошёл XIII турнир математических флеш-боёв «Лига открытий», в которой участвовало 26 команд шестиклассников и 42 команды пятиклассников из 14 городов России. Команда «Киров-6» заняла первое место в первой лиге 6 классов, команда «Киров-5» участвовала в первой лиге 5 классов.

27 – 30 марта состоялся заключительный этап XV олимпиады имени Леонарда Эйлера, проведённой для восьмиклассников России Кировским ЦДООШ и Московским Центром непрерывного математического образования. В нём приняли участие 262 учащихся 6-8 классов. Участники были распределены по территориальному признаку по четырём локальным финалам в Кирове, Барнауле, Москве и Санкт-Петербурге. В финале участвовало 4 кировчанина. *Ульяна Кучина* завоевала диплом III степени.

9 апреля в режиме онлайн состоялась игра «Математическая абака». В ней приняло участие 160 учащихся 4 классов, 322 — 5 классов и 166 — 6 классов из Кирова и области.

16 апреля. XIX всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф. Шарыгина (XX устная олимпиада по геометрии, г. Москва). Кировчане участвовали на региональной площадке в ЦДООШ, и 14 из них завоевали дипломы и грамоты: *Сергей Суровцев* — диплом II степени, *Михаил Ершов*, *Ульяна Кучина*, *Андрей Ходырев*, *Иван Киселев*, *Анастасия Сиротина* — дипломы III степени, *Александр Волков*, *Максим Ворончихин*, *Ярослав Долженков*, *Мария Ларина* (КФМЛ, 8 кл.), *Софья Новикова*, *Максим Осацкий*, *Матвей Трифонов* (КЭПЛ, 9 кл.), *Вадим Пупышев* — похвальные грамоты.

21 – 27 апреля. Заключительный этап Всероссийской математической олимпиады школьников в г. Сочи (федеральная территория «Сириус»). Участвовали кировчане *Александр Гнусов* (диплом победителя по 11 кл., лучшая сумма баллов по 11 кл.), *Михаил Муравьев* (диплом призёра по 10 классу), *Сергей Суровцев* (диплом призёра по 9 классу), *Никита Паюсов*, *Иван Киселёв*, *Игорь Чебыкин*.

14 – 16 апреля. Казанский турнир математических игр имени Н.Г. Чеботарева. 13 команд кировчан участвовало в этом турнире. Команды «Киров 5-3», «Киров 5-7», завоевали дипломы I степени, команды «Киров 5-1», «Киров 5-2», «Киров 5-5», «Киров 5-6» — дипломы II степени, команды «Киров 4-1», «Киров 4-2», «Киров 4-4», «Киров 5-4» — дипломы III степени.

3 – 9 мая. LX Уральский (XXXI Кировский) турнир юных математиков. Участвовало 114 команд, представлявших 21 город России. Команда «КЭПЛ-8» заняла 7 место в высшей лиге старшей группы, «Киров 8-1» участвовала во второй лиге старшей группы, команда «Киров 8-2» заняла 7 место в третьей лиге старшей группы, команды «Киров 7-1» и «Киров 7-2» участвовали во второй лиге младшей группы, команды «Киров 6-1» и «Киров 5-1» заняли 2 место во второй лиге группы «Старт», команды «Киров 5-2» и «Киров 6-2» участвовали во второй лиге группы «Старт», команды «КЭПЛ 5-1» и «КЭПЛ 5-2» — в третьей лиге группы «Старт».

2 – 13 июля в японском городе Чибо прошла 64-я Международная Математическая олимпиада по математике, российские школьники приняли участие в ней дистанционно, с площадки Дальневосточного федерального университета. Кировчанин *Александр Гнусов* завоевал золотую медаль и с 37 баллами из 42 возможных разделил 10-11 место в общемировом личном зачете.

1 – 26 июля. XXXIX Летняя многопредметная школа Кировской области. 427 учащихся (в том числе 249 математиков), среди которых 293 иногородних из 24 регионов России.

29 июля – 1 августа. Финальный тур XIX олимпиады по геометрии им. И.Ф. Шарыгина. Участвовали *Ульяна Кучина* и *Сергей Суровцев*, они награждены дипломами II степени.

1 – 10 августа. *Сергей Суровцев* участвовал в XXXV Международной конференции Турнира городов (Московская область, г. Дубна). По итогам конференции награжден дипломом.

По итогам **44 Турнира городов**, проходившего в 2022/23 учебном году, 30 школьников из Кировской области награждены дипломами победителей.

21 – 24 сентября. В г. Казани прошёл XIV турнир математических флеш-боёв «Лига открытий». Команда «Киров 6-1» заняла 2 место в высшей лиге 6 классов, команда «Киров 6-2» — 7 место в высшей лиге 6 классов. Всего участвовало 32 команды шестиклассников, представлявших 15 городов России.

15 октября состоялась онлайн-игра «Математический кросс», в которой приняли участие 496 пятиклассников из Кирова и области.

22 октября состоялась онлайн-игра «Математическое многоборье». В ней приняло участие 273 шестиклассника из Кирова и области.

25 – 31 октября. В этнографическом парке-отеле «Этномир» (Калужская область, Боровский район) прошёл LXI Уральский турнир юных математиков. Участвовало 102 команды, представлявшие 19 городов России. Команда «Киров-8» заняла 4 место во второй лиге старшей группы, команда «Киров-7» участвовала во второй лиге младшей группы, команда «Киров-6» заняла 4 место в высшей лиге группы «Старт».